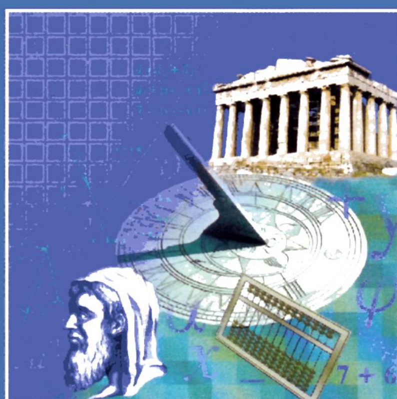
# MATEMATIKA 11

MOKYTOJO KNYGA








# MATEMATIKA 11

MOKYTOJO KNYGA



TEV

VILNIUS 2003

UDK 372.851
Ma615

Darbo vadovas *Vilius Stakėnas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė, Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Inga Paukštienė, Daiva Sniečkutė, Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Laimutė Ališauskienė, Nijolė Drazdauskienė*

Konsultantas *Elmundas Žalys*

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

2003 09 29. 20 sp. l. Užs. Nr. 336
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius
Spausdino UAB „Petro ofsetas",
Žalgirio g. 90, LT-2005 Vilnius

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955-491-49-3

# TURINYS

# PRATARMĖ

Viena yra rašyti — kita kalbėti. „Kalba tarsi iš rašto“ — šiame posakyje yra ironijos atšvaitas. Kita vertus — „ką pasakė, tą parašė“ — irgi nekoks parašyto veikalo įvertinimas.

Matematinių klausimų dėstymas knygose bei vadovėliuose ir gyvai bendraujant su moksleiviais ir studentais — taip pat skirtingi dalykai.

Vadovėliai rašomi siekiant glaustai ir tiksliai išdėstyti medžiagą, kad nebūtų įmanomos skirtingos interpretacijos. O dėstant gyvu žodžiu ne tiek svarbus formuluočių tikslumas, kiek emocinių akcentų įtaiga ir konkretumas. Žinoma, visur reikalingas saikas (nuostabi antikinės kultūros idėja, kuria taip sunku vadovautis!): metaforų gausa gali taip pat varginti, kaip ir jų stygius. Galima pasakyti ir taip: vadovėlis tai tekstas, scenarijus, pagal kurį mokytojas ar dėstytojas turi suvaidinti savo pamokos ar paskaitos spektaklį. Jis bus vykęs, jeigu nors dalis žiūrovų (moksleivių ar studentų) įsitrauks, taps dalyviais.

Aptardami šioje knygoje XI klasės matematikos vadovėlio skyrius, stengėmės ne tiek vardyti, kas juose parašyta, kiek bandyti įsivaizduoti, kaip juos „vaidinti“: ką pabrėžti, paryškinti, kuo nusistebėti... Žinoma, visos pastabos yra subjektyvios ir nepretenduoja į jokį metodikos žanrą. Kita vertus, metodiniai nurodymai kartais primena bandymus graibšteliu sugauti saulės spindulį — ryškios mokytojo asmenybės įtaigą, žavesį ir sėkmę.

Knygoje nėra jokių komentarų tik apie geometrijos skyrius. Plokštumos geometrijos temos jau išeitos žemesnėse klasėse, taigi XI–XII klasėse lieka jas pakartoti. Kaip tai padaryti pačiu geriausiu būdu, matyt, geriausiai nuspręs patys mokytojai, atsižvelgę į įvairias savo darbo aplinkybes.

Kitą šios mokytojo knygos dalį sudaro visų XI klasės matematikos vadovėlio uždavinių sprendimai, komentarai ir atsakymai. Žinoma, mokytojai puikiai verčiasi ir be jų. Tačiau ir didieji aktoriai būna dėkingi sufleriams, kartais padedantiems išsisukti iš keblios padėties.

Belieka pridurti, kad vdovėlio ir šios knygos autoriams būtų naudinga ir malonu gauti pastabų, atsiliepimų ir pasiūlymų. Deja, tokių malonumų susilaukiama retai...

Linkime Jums sėkmės, įkvėpimo ir smalsių mokinių, mieli matematikos mokytojai!

Vilius Stakėnas

# I. SKAIČIAI IR REIŠKINIAI, LYGTYS IR NELYGYBĖS

Prieš pradedant nagrinėti šį didelį skyrių, verta keliais sakiniais nusakyti, ką sužinosime, ko išmoksime, ką pakartosime ...

Nagrinėsime skaičius. Tai pati svarbiausia matematikos sąvoka. Sužinosime, kokių yra skaičių, kaip juos užrašyti, kokius veiksmus su jais galima atlikti, kokios šių veiksmų savybės.

Nagrinėsime lygtis, nelygybes ir jų sistemas. Išspręsti lygtį ar nelygybę — tai tarsi išnarplioti detektyvinę istoriją: remiantis suteikta informacija, reikia surasti tinkamas nežinomųjų reikšmes.

## 1. REALIŲJŲ SKAIČIŲ AIBĖ

### 1.1. Sveikieji skaičiai

Praėjo daug amžių, kol natūralieji skaičiai tapo nors ir neregimais, tačiau nuolatiniais žmonių gyvenimo palydovais.
Pasiūlykite įsivaizduoti, kad natūraliųjų skaičių yra be galo daug, t. y. skaičių eilė tęsiasi be galo. Kaip juos įsivaizduojate? Kaip kokių akmenėlių virtinę? Tačiau juk visi skaičiai skirtingi. Vadinasi, reikia mokėti juos taip užrašyti, kad galėtume atskirti vienus nuo kitų.
Pabrėžkite, koks svarbus išradimas yra dešimtainė skaičiavimo sistema. Skaičius — vienetų suma — suskaidomas dešimtimis, dešimtys — šimtais, šimtai — tūkstančiais ... Po to užrašome: kiek vienetų nepakliuvo į dešimtis, kiek dešimčių — į šimtus ir t. t. Visai skaičių begalybei užrašyti pakanka dešimties simbolių — skaitmenų!
Kitas svarbus požiūris į natūraliuosius skaičius — juos galima skaidyti į mažesnių skaičių sandaugas. Pavyzdžiui, $24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Skaidymas užsibaigia, kai visi daugikliai yra pirminiai skaičiai. Pirminius skaičius galima įsivaizduoti kaip tam tikras „plyteles“, iš kurių sudaryti visi kiti skaičiai.
Pasiūlykite užrašyti kelis mažiausius pirminius skaičius. Ar gali dviejų pirminių skaičių skirtumas būti lygus vienam; dviem; trim?
Natūraliųjų skaičių veiksmai (sudėtis, atimtis, daugyba, dalyba) atsirado kaip realaus gyvenimo veiksmų atspindys. Tačiau tik sudėties ir daugybos veiksmus galima atlikti su bet kuriais natūraliaisiais skaičiais.
Matematikai linkę atsikratyti atskirais atvejais ir apribojimais. Papildę natūraliųjų skaičių aibę nuliu ir neigiamaisiais skaičiais, gaunama sveikųjų skaičių aibė. Su sveikaisiais skaičiais galima be apribojimų atlikti jau tris veiksmus: daugybą, sudėtį ir atimtį.
Pabrėžkime, kad nulis ir vienetas yra ypatingi skaičiai, tikri „keistuoliai“ ...

***Įsivaizduojame ir suvokiame:***
natūraliųjų skaičių aibė yra begalinė;
bet kurį natūralųjį skaičių galima užrašyti naudojantis dešimtimi skaitmenų;
natūralusis skaičius vieninteliu būdu užrašomas pirminių skaičių sandauga;
natūraliųjų skaičių aibėje be apribojimų galima atlikti du, o sveikųjų — jau tris veiksmus.

***Mokame:***
dešimtainėje sistemoje užrašytą skaičių užrašyti vienetų, dešimčių ir t. t. suma;
išskaidyti natūralųjį skaičių pirminiais dauginamaisiais;
rasti dviejų natūraliųjų skaičių didžiausiąjį bendrąjį daliklį ir mažiausiąjį bendrąjį kartotinį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pirmieji penki uždaviniai skirti žinioms apie skaičių reiškimą dešimtainėje skaičiavimo sistemoje įtvirtinti. 1, 2 ir 3 uždavinius nesunku išspręsti ir be lygčių, tiesiog atlikus paprasčiausią perranką. Nebūtina išspręsti visus penkis uždavinius. Galima, pavyzdžiui, išspręsti vieną iš pirmų trijų, po to — 4-tą, o 5-tą, kuris yra kiek sudėtingesnis, pasiūlyti išspręsti stipresniems mokiniams. 6 uždavinys skirtas didžiausiojo bendrojo daliklio ir mažiausiojo bendrojo kartotinio radimo algoritmų pakartojimui. Jeigu mokiniai gerai moka šį algoritmą, galima uždavinį praleisti. 7 ir 8 uždaviniams išspręsti reikia žinoti skaičių dalybos iš 2, 3, 5 ir 9 požymius.

**1.** a) *I būdas.* Pažymėkime ieškomą skaičių $\overline{xy} = 10x + y$. Sukeitę skaitmenis vietomis, gauname: $\overline{yx} = 10y + x$. Tuomet
$\overline{yx} - \overline{xy} = 10y + x - (10x + y) = 9y - 9x$.
Skaitmenims $x$ ir $y$ surasti reikia išspręsti lygčių sistemą:
$$\begin{cases} 9y - 9x = 18, \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 2, \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2, \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$
Taigi pradinis skaičius yra 13.

*II būdas.* Šis sprendimo būdas — perranka. Kadangi dviženklio skaičiaus vienetų skaitmuo trigubai didesnis už dešimčių skaitmenį, tai pradiniu skaičiumi gali būti 13, 26 arba 39. Sukeitę skaitmenis vietomis atitinkamai gausime 31, 62 ir 93 bei skirtumus $31 - 13 = 18$, $62 - 26 = 36$, $93 - 39 = 54$. Vadinasi, tinka tik skaičius 13.

b) Ieškomą skaičių pažymėję $\overline{xy}$, uždavinio atsakymą gausime išsprendę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 9y - 9x = 27, \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 3, \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 6. \end{cases}$$

Taigi pradinis skaičius yra 36.

*Pastaba.* Perrenkant reikėtų patikrinti, ar skaičiai 12, 24, 36 ir 48 tenkina uždavinio sąlygą.

**2.** a) Pažymėkime ieškomą skaičių $\overline{xy} = 10x + y$. Surasti uždavinio sąlygą tenkinančiam skaičiui, turime spręsti lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \overline{yx} - \overline{xy} = 36, \\ y - x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y - 9x = 36, \\ y - x = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 4, \\ y - x = 4. \end{cases}$$

Pastarąją lygčių sistemą, kurios abi lygtys vienodos, tenkina skaitmenų poros (1; 5), (2; 6), (3; 7), (4; 8), (5; 9).

Taigi dviženklių skaičių, tenkinančių uždavinio sąlygą, yra net penki: 15, 26, 37, 48, 59.

*Pastaba.* Žinoma, šiuos skaičius galėjome užrašyti ir nesprendę lygčių sistemos. Tačiau tuomet reikėtų įsitikinti, kad kiekvienas iš jų tenkina ir antrąją uždavinio sąlygą, t. y. kad sukeitus skaitmenis vietomis gaunamas 36 vienetais didesnis už pradinį skaičius.

b) Yra tik du dviženkliai skaičiai, kurių vienetų skaitmens ir dešimčių skaitmens skirtumas lygus 7. Tai skaičiai 18 ir 29. Sukeitę skaitmenis vietomis, gausime atitinkamai skaičius 81 ir 92. Vadinasi, tenkinančių uždavinio sąlygą skaičių nėra.

*Pastaba.* Spręsdami kitaip, t. y. pažymėję ieškomą skaičių $\overline{xy}$ ir sudarę lygčių sistemą, gautume neturinčią sprendinių sistemą:

$$\begin{cases} y - x = 3, \\ y - x = 7. \end{cases}$$

**3.** *I būdas.* Jeigu ieškomas skaičius yra $\overline{xy}$, tai

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ 10x + y - 27 = 10y + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 9,\ y = 6.$$

*II būdas.* Uždavinį galima spręsti ir perrenkant galimus variantus: dviženkliai skaičiai, kurių skaitmenų suma lygi 15, yra 69, 96, 78 ir 87. Tik skaičius 96 tenkina uždavinio sąlygas.

*Atsakymas.* 96.

**4.** Pažymėkime ieškomą skaičių $\overline{xy3}$. Pagal sąlygą, turi galioti lygybė:

$300 + 10x + y - 27 = 100x + 10y + 3.$

Pertvarkę lygtį, gausime: $10x + y = 30$.

Kadangi $x$ ir $y$ yra skaitmenys, tai $x = 3$, $y = 0$.

*Atsakymas.* 303.

**5.** Tegu garsiojo matematiko gimimo metai yra $\overline{1xyz}$. Tuomet pagal sąlygą

$1 + x + y + z = 21$ ir $\overline{1xyz} + 5355 = \overline{zyx1}$.

Pertvarkykime antrąją lygtį:

$1000 + 100x + 10y + z + 5355 = 1000z + 100y + 10x + 1,$

$10(10x + y + 635) + z + 5 = 10(100z + 10y + x) + 1.$

Iš šios lygybės dešiniosios pusės matome, kad skaičiaus $10(100z + 10y + x) + 1$ paskutinis skaitmuo yra 1. Pagal kairiąją šios lygybės pusę taip gali būti vieninteliu atveju, kai $z = 6$. Taigi $z = 6$ ir gauname lygtį:

$10(10x + y + 635) + 11 = 10(600 + 10y + x) + 1.$

Pertvarkę ją ir prijungę sąlygos dalį, jog skaitmenų suma lygi 21, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x - y = -4, \\ x + y = 14. \end{cases} \text{Iš čia } x = 5,\ y = 9.$$

Todėl $\overline{1xyz} = 1596$.

Tai garsaus XVI amžiaus prancūzų filosofo ir matematiko R. Dekarto (René Descartes) gimimo metai.

*Atsakymas.* 1596 m., R. Dekartas.

6. Ieškant didžiausiojo bendrojo daliklio ir mažiausiojo bendrojo kartotinio, geriausia duotuosius skaičius išskaidyti pirminiais dauginamaisiais. Skaičių $m$ ir $n$ didžiausiąjį bendrąjį daliklį žymėkime $(m, n)$, o jų mažiausiąjį bendrąjį kartotinį — $[m, n]$. Kadangi:

a) $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, tai
$(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$, $[12, 18] = 2^2 \cdot 3^2 = 36$;

b) $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$;
$(72, 108) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$, $[72, 108] = 2^3 \cdot 3^3 = 216$;

c) $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $147 = 3 \cdot 7^2$;
$(126, 147) = 3 \cdot 7 = 21$, $[126, 147] = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 882$;

d) $325 = 5^2 \cdot 13$, $250 = 2 \cdot 5^3$;
$(325, 250) = 5^2 = 25$, $[325, 250] = 2 \cdot 5^3 \cdot 13 = 3250$;

e) $96 = 2^5 \cdot 3$, $528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$;
$(96, 528) = 2^4 \cdot 3 = 48$, $[96, 528] = 2^5 \cdot 3 \cdot 11 = 1056$.

7. a) Tegu ieškomas skaičius yra $\overline{x25}$. Kad skaičius dalytųsi iš 3, jo skaitmenų suma turi dalytis iš 3.
Kai $x = 9$, tai $9 + 2 + 5 = 16$ nesidalija iš 3.
Kai $x = 8$, tai $8 + 2 + 5 = 15$ dalijasi iš 3.

b) Ieškomą skaičių pažymėkime $\overline{x28}$. Jis yra lyginis. Todėl šis skaičius dar turi dalytis iš 9 (jo skaitmenų suma turi dalytis iš 9). Pats didžiausias skaitmuo, tenkinantis šią sąlygą, yra $x = 8$.

*Atsakymas.* a) 825; b) 828.

8. a) Triženklis skaičius $\overline{x1y}$ dalijasi iš 45 tik tuomet, kai jis dalijasi ir iš 9, ir iš 5. Vadinasi, $y = 0$ arba $y = 5$. Kad skaičius $\overline{x10}$ dalytųsi iš 9, iš 9 turi dalytis jo skaitmenų suma $x + 1$, t. y. $x = 8$. Kad skaičius $\overline{x15}$ dalytųsi iš 9, iš 9 turi dalytis $x + 6$. Vadinasi, $x = 3$.

b) Keturženklis skaičius $\overline{x97y}$ dalijasi iš 45 tik tuomet, kai $y = 0$ ir $x + 16$ dalijasi iš 9 arba kai $y = 5$ ir $x + 21$ dalijasi iš 9. Vadinasi, $y = 0$, $x = 2$ arba $y = 5$, $x = 6$.

*Atsakymas.* a) 810 arba 315; b) 2970 arba 6975.

## 1.2. Racionalieji skaičiai

Racionalieji skaičiai moksleiviams jokia naujiena. Tikriausiai dauguma jų yra gerai įvaldę veiksmų su racionaliaisiais skaičiais taisykles, moka racionaliuosius skaičius palyginti. Todėl ir vadovėlyje tik primenamos formalios žinios apie racionaliuosius skaičius ir jų veiksmus. Manome, kad to pakanka.

Racionaliųjų skaičių aibės vaizdiniui susidaryti svarbesnė skyrelio pabaiga, kurioje dėstoma geometrinė racionaliųjų skaičių interpretacija. Racionaliųjų skaičių temą galima būtų nuo to ir pradėti.

Nubrėžkime tiesę ir pasirinkime joje tašką. Šis taškas vaizduos skaičių 0. Dešiniau pasirinkime kitą tašką — jis vaizduos skaičių 1. Dabar galima surasti taškus, vaizduojančius natūraliuosius skaičius. Po to dalykime atkarpą tarp nulio ir vieneto į $n$ vienodų dalių. Gautieji taškai vaizduoja skaičius $\frac{m}{n}$, $m \leqslant n$. Toliau galima pavaizduoti ir skaičius $\frac{m}{n}$, $m \geqslant n$. Šitaip dėstant, galima neformaliai paaiškinti, kodėl, pavyzdžiui, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ir pan. Pasiūlykite įsivaizduoti, kaip racionalieji skaičiai yra tankiai „susigrūdę“ skaičių tiesėje: kokius du taškus bepaimtume, tarp jų bus daug racionaliųjų skaičių. Baigtinis kiekis ar be galo daug?

Po to jau galima pereiti prie visos racionaliųjų skaičių aibės, racionaliųjų skaičių palyginimo ir veiksmų.

***Įsivaizduojame ir suvokiame:***

racionaliuosius skaičius galima atidėti skaičių tiesėje;
racionalieji skaičiai visoje tiesėje išsidėstę labai tankiai;
racionaliųjų skaičių aibė apima sveikųjų skaičių aibę;
su racionaliaisiais skaičiais galima atlikti visus veiksmus (žinoma, išskyrus dalybą iš nulio).

***Mokame:***

atidėti racionaliuosius skaičius skaičių tiesėje;
palyginti racionaliuosius skaičius;
su racionaliaisiais skaičiais atlikti veiksmus.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Racionaliųjų skaičių palyginimo įgūdžiams skirtas 9 uždavinys. Verta išnagrinėti bent du pavyzdžius: vieną su teigiamais, kitą su neigiamais skaičiais.

10, 11 ir 12 uždaviniai skirti veiksmų su racionaliaisiais skaičiais įgūdžiams pakartoti. 12 uždavinio tikrai neverta spręsti klasėje, nes veiksmams atlikti prireiks ir laiko, ir atidumo. Galima po vieną uždavinio dalį pasiūlyti padaryti namuose. Galbūt tokia užduotis atrodo nuobodi. Galima pabandyti šiek tiek ją pagyvinti, pavyzdžiui, taip: „Įsižiūrėkime į lygtį. Pabandykime „iš akies“ įvertinti, kam apytiksliai turėtų būti lygus $x$. Hipotezei patikrinti yra vienas būdas — apskaičiuoti tikslią $x$ reikšmę!“.

**9.** *Nurodymas.* Palyginti racionaliuosius skaičius, užrašytus paprastosiomis trupmenomis, patogu suvienodinus šių trupmenų vardiklius.
a) $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$, $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$, $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$;
b) $-\frac{5}{12} = -\frac{15}{36}$, $-\frac{4}{9} = -\frac{16}{36}$, $-\frac{5}{12} > -\frac{4}{9}$;
c) $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$, $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$, $\frac{7}{12} < \frac{5}{8}$;
d) $-\frac{2}{3} = -\frac{8}{12}$, $-\frac{2}{3} < -\frac{7}{12}$.

**10.** a) $x = \frac{5}{6}$; b) $x = 2\frac{7}{12}$; c) $x = 2\frac{2}{7}$; d) $x = 2$; e) $x = -2\frac{8}{9}$; f) $x = 1,1$.

**11.** a) 7; b) 5; c) $\frac{9}{19}$ . *Nurodymas.* $a : b : c = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$;
d) 2; e) 3; f) 2; g) $\frac{12}{55}$; h) $\frac{13}{30}$; i) $\frac{3}{4}$.

**12.** a) $x = 40$; b) $x = 14$; c) $x = 2\frac{7}{44}$; d) $x = 9$.

# 1.3. Dešimtainės trupmenos

Racionalųjį skaičių galima užrašyti daugeliu paprastųjų trupmenų. Dažniausiai racionalusis skaičius užrašomas nesuprastinama paprastąja trupmena. Tačiau tai ne visada pati patogiausia skaičiaus išraiška. Pavyzdžiui, sudedant du racionaliuosius skaičius, pirmiausiai jie užrašomi trupmenomis su vienodais vardikliais:

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{29}{36}.$$

Norint racionaliuosius skaičius palyginti, taip pat pirmiausiai jie užrašomi paprastosiomis trupmenomis su vienodais vardikliais.

Galbūt siekiant supaprastinti racionaliųjų skaičių veiksmų ir lyginimo taisykles, verta atsisakyti vardiklių įvairovės ir reikšti juos paprastosiomis trupmenomis su kiek galima „vienodesniais“ vardikliais? Pavyzdžiui, galima pabandyti reikšti racionaliuosius skaičius dešimtainėmis trupmenomis, t. y. paprastosiomis trupmenomis, kurių vardikliai yra dešimties laipsniai:

$$\frac{7}{100}=0{,}07,\qquad \frac{17\cdot 4}{125\cdot 4}=\frac{68}{1000}=0{,}068.$$

Dešimtainės racionaliojo skaičiaus išraiškos skaitmenys turi panašią prasmę, kaip ir natūraliojo skaičiaus išraiškos dešimtainėje sistemoje skaitmenys: jie parodo, iš kiek dešimtųjų, šimtųjų ir t. t. dalių sudarytas racionalusis skaičius:

$$0{,}068=\frac{0}{10}+\frac{6}{100}+\frac{8}{1000}.$$

Paprastai racionalusis skaičius verčiamas dešimtaine trupmena dalijant „kampu“. Galbūt kas nors paklaus, kodėl tokia dalyba duoda dešimtainę trupmeną? Galima paaiškinti, kad šitaip dalijant nuosekliai išskiriamas dešimtųjų, šimtųjų ir t. t. dalių skaičius. Panagrinėkime vieną pavyzdį:

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{10}\cdot\frac{30}{8}=\frac{1}{10}\cdot\frac{3\cdot 8+6}{8}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{8}=$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{1}{100}\cdot\frac{60}{8}=\frac{3}{10}+\frac{1}{100}\cdot\frac{7\cdot 8+4}{8}=$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{4}{8}=\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}.$$

Svarbus faktas, su kuriuo susiduriama reiškiant racionaliuosius skaičius dešimtainėmis trupmenomis, — būna, kad dalybos procesas „kampu“ nesibaigia! Taigi yra racionaliųjų skaičių, kurių negalima „sudėti“ iš dešimtųjų, šimtųjų ir t. t. dalių. Šitaip prieinama prie begalinių dešimtainių trupmenų sąvokos.

Pasiūlykite moksleiviams išreikšti dešimtaine trupmena po vieną paprastąją trupmeną, kurios vardiklis nėra vien dvejetų ir penketų sandauga. Tegu jie patys pastebi, kad dešimtainės išraiškos skaitmenys ima kartotis. Tegu patys pasvarsto, kodėl taip atsitinka.

Taigi reiškiant paprastąsias trupmenas dešimtainėmis, kartais gaunamos baigtinės trupmenos, kartais — begalinės. Tačiau šios begalinės trupmenos yra periodinės, taigi užrašomos pagal tam tikrą taisyklę. Kiek pasistengus, visada galima nustatyti, koks yra tokios trupmenos, tarkime, 200-asis, 523-asis skaitmuo ir t. t.

Toliau vadovėlyje pavyzdžiais mokoma spręsti priešingą uždavinį — begalines dešimtaines periodines trupmenas versti paprastosiomis. Šis būdas — sudaryti paprastą tiesinę lygtį ir ją išspręsti — gali pasirodyti panašus į kokį fokusą. Žinoma, griežtos logikos požiūriu jis nėra pakankamai pagrįstas. Pavyzdžiui, daugindami begalinę dešimtainę periodinę trupmeną iš dešimties laipsnio tarsi jau iš anksto žinome, kad ta trupmena reiškia skaičių. Tačiau kiekvienu atveju šiuo fantastišku būdu gautą rezultatą galima patikrinti naudojant dalybą „kampu“!

Apskritai, svarbiau yra ne tiek metodų pagrįstumas, kiek nauja idėja — reikšti racionaliuosius skaičius dešimtainėmis trupmenomis. Ši idėja, viena vertus, parodo natūraliųjų skaičių ir racionaliųjų skaičių užrašymo dešimtaine sistema analogiją, kita vertus — priartina prie iracionaliojo skaičiaus sąvokos.

***Įsivaizduojame ir suvokiame:***

racionaliuosius skaičius galima reikšti baigtinėmis arba begalinėmis periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis;

kiekviena tokia trupmena reiškia atitinkamą racionalųjį skaičių;

racionaliojo skaičiaus išraiška dešimtaine trupmena yra analogiška natūraliųjų skaičių išraiškai dešimtainėje skaičiavimo sistemoje.

***Mokame:***

užrašyti racionaliuosius skaičius dešimtainėmis trupmenomis;

nustatyti, kokį racionalųjį skaičių atitinka duotoji begalinė dešimtainė periodinė trupmena.

## PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pirmieji keturi uždaviniai (13–16) skirti paprastųjų trupmenų užrašymo dešimtainėmis ir atvirkščiai algoritmams įsisavinti. Aišku, visus juos išspręsti nėra būtina. 17 uždavinio sąlyga reikalauja palyginti du skaičius. Prieš sprendžiant galima kiek pasvarstyti, kokį būdą geriau pasirinkti. Gal dešimtaines trupmenas versti paprastosiomis? O gal atvirkščiai? O gal galima iš karto pasakyti, kuris skaičius didesnis, pavyzdžiui, e) punkte, kuriame prašoma palyginti skaičius 1,(31) ir 1,31? Paskutinieji du skyrelio uždaviniai skirti racionaliųjų skaičių veiksmams. Juos geriau skirti namų darbams.

**13.** a) 0,28; b) −0,4375; c) 1,625; d) −0,128; e) 0,12; f) −3,75.

**14.** a) $\frac{1}{8}$; b) $-2\frac{3}{40}$; c) $1\frac{3}{8}$; d) $-\frac{29}{40}$; e) $3\frac{3}{25}$; f) $-\frac{9}{25}$.

**15.** a) $2\frac{7}{9}$; b) $\frac{41}{45}$; c) $-3\frac{41}{99}$; d) $-\frac{54}{55}$; e) $5\frac{5561}{19980}$; f) $\frac{2113}{9900}$.

**16.** d) $2\frac{3803}{33330}$.

**17.** a) $\frac{1}{6} = 0,1(6)$; b) $0,(4) < \frac{9}{20}$; c) $-\frac{7}{12} = -0,58(3)$; d) $0,(63) < \frac{8}{11}$; e) $1,(31) > 1,31$; f) $-1,23(4) < -1,234$; g) $-1,8(9) = -1,9$; h) $2\frac{1}{5} < 2,(2)$; i) $1,9(8) > 1,8(9)$.

**18.** a) 0,5; b) 0,115; c) 111.

**19.** a) 211; b) 2,5; c) $\frac{67}{1244}$; d) $207\frac{15}{106}$.

Matematikoje labiau nei kitose kūrybos bei žinių srityse remiamasi formalia logika, įrodymais. Tačiau matematika taip pat kaip ir kiti mokslai — gyvų žmonių, o ne neklystančių protavimo automatų veiklos sritis. Todėl ir matematikoje svarbūs intuityvūs vaizdiniai, metaforos. Kartais matematinės teorijos plėtojamos nepakankamai gerai išsiaiškinus loginę jų pagrindų struktūrą. Tai suprantama — iš pradžių pakanka ryškių ir paprastų vaizdinių. Tačiau vėliau susiduriama su sunkumais, atsirandančiais dėl nepakankamai pagrįstų prielaidų. Matematikos istorijoje žinomos kelios tokios matematikos pagrindų krizės. Pirmoji jų susijusi su iracionalumo atradimu.

Pitagoriečiai žinojo tik natūraliuosius skaičius ir jų santykius. Suprantama, jog buvo laikoma, kad bet kurios atkarpos ilgį galima išreikšti tokiais dydžiais. Ir staiga buvo išsiaiškinta, kad yra atkarpų, kurių ilgio negalima išreikšti natūraliųjų skaičių santykiu. Tikra viso žinių stãtinio katastrofa! Juk padaryti išvadą, kad yra ir kitokių skaičių, jie negalėjo. Kaipgi tokius skaičius reikėtų reikšti ir vaizduoti?

Bandydami išspręsti šią matematikos krizę antikinės Graikijos matematikai sukūrė geometrinį požiūrį į skaičius, kuriuo faktiškai matematikai rėmėsi beveik pusantro tūkstančio metų. Ir mums pakanka tokio požiūrio, paremto labiau intuityviais vaizdiniais negu loginiais argumentais.

Pavyzdžiui, mes be papildomų paaiškinimų tikime, kad pasirinkus atkarpą — ilgio vienetą — visų kitų atkarpų ilgiai išreiškiami skaičiais. Taigi kiekvienas skaičių tiesės taškas vaizduoja skaičių. Lieka tik tokia problema — išsiaiškinti, kaip galima tuos skaičius užrašyti.

Natūralieji skaičiai užrašomi naudojant dešimtainę skaičiavimo sistemą, racionalieji — paprastąsias trupmenas. Šie abu būdai atrodo menkai susiję, tačiau įvedus dešimtaines trupmenas (baigtines ir begalines, tačiau periodines) tarsi sukuriamas vieningas požiūris į skaičių užrašymą — tiek sveikųjų, tiek racionaliųjų. Galbūt tuo viskas padaryta, šitaip galima užrašyti visus skaičius, kuriuos vaizduoja skaičių tiesės taškai?

Tačiau nagrinėdami statųjį trikampį, kurio statinių ilgiai lygūs 1 ir 2, atrandame, kad ne viskas yra taip paprasta, kaip gali atrodyti. Žinoma, galima pasirinkti ir kitokį trikampį. Pats paprasčiausias trikampis, kurį nagrinėjant galima atrasti iracionalumą — lygiašonis statusis. Jo nepasirinkome, kad nesusidarytų įspūdis, kad statinių lygumas turi kažkokią reikšmę.

Kad minėto stačiojo trikampio įžambinės ilgis nėra išreiškiamas racionaliuoju skaičiumi, įrodome klasikiniu prieštaros būdu. Prieš formaliai jį nagrinėjant verta keliais sakiniais apibūdinti šią ypatingą matematikų gudrybę. Negalėdami kokio nors teiginio įrodyti tiesiogiai, matematikai įrodinėja, kad jeigu būtų teisingas priešingas teiginys, tai būtų teisinga ir kokia nors nesąmonė. Gavus išvadą, kad ne visi skaičių tiesės taškais vaizduojami skaičiai yra racionalieji, lieka tik kaip nors juos pavadinti. Taigi skaičių tiesės taškais vaizduojami racionalieji skaičiai (*rationalis* — lotyniškai protingas) ir likusieji — iracionalieji (*irrationalis* — lotyniškai neprotingas).

Kaip užrašomi racionalieji skaičiai, jau žinome — baigtinėmis arba begalinėmis, tačiau periodinėmis trupmenomis. Kaip išreikšti iracionalųjį skaičių? Norėdami tai padaryti, tarsi „gaudome“ iracionalųjį skaičių iš abiejų pusių: imdami mažesnius ir didesnius už nagrinėjamą iracionalųjį skaičių racionaliuosius skaičius. Šių racionaliųjų skaičių dešimtainės išraiškos ilgėja, mažesniojo skaičiaus išraiška tiesiog papildoma prirašant prie pabaigos vieną skaitmenį. Taigi skaitmenų seką galima tęsti ir tęsti be galo: ši kažkur į begalybę nusitiesusi skaitmenų rikiuotė ir yra iracionaliojo skaičiaus dešimtainė išraiška.

Reikia paminėti, kad skaičiavimuose šios begalinės sekos, žinoma, nenaudojamos. Kai kurie iracionalieji skaičiai žymimi specialiais simboliais, ir jie naudojami skaičiavimuose (pavyzdžiui, $\sqrt{2}, \pi$), arba jie keičiami racionaliaisiais artiniais.

***Įsivaizduojame ir suvokiame:***

kiekvienas skaičių tiesės taškas atitinka skaičių;

kiekvienas skaičius gali būti užrašytas dešimtaine trupmena: racionalieji skaičiai užrašomi baigtinėmis arba begalinėmis periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis, iracionalieji — begalinėmis neperiodinėmis dešimtainėmis trupmenomis.

***Mokame:***

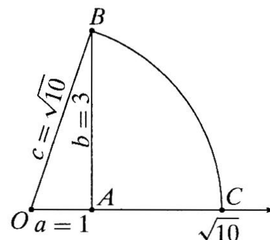
įrodyti, kad ne visi skaičiai yra racionalūs;

apvalinti skaičius norimu tikslumu.

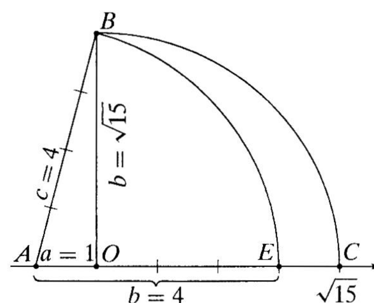
## PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Atidėti iracionalųjį skaičių tiesėje nėra paprasta. Tačiau kai kuriuos iracionaliuosius skaičius nesunku atidėti naudojant statųjį trikampį. Šiai temai skirtas 20 uždavinys. Būtų įdomu išnagrinėti visus jo punktus, tačiau stokojant laiko pakaktų išnagrinėti tik punktus a) ir f). Tolimesni trys uždaviniai (21–23) padeda suvokti iracionaliojo skaičiaus vietą skaičių tiesėje. Paskutinieji trys uždaviniai (24–26) skirti realiojo skaičiaus apvalinimo problemai. Žinoma, 26 uždavinio visų punktų sprendimas užimtų daug laiko, todėl šį uždavinį galima užduoti savarankiškam darbui.

**20.** a) Stačiojo trikampio, kurio statinių ilgiai yra $a = 1$ ir $b = 3$, įžambinės ilgis yra $c = \sqrt{10}$. Skaičių $\sqrt{10}$ atidėti skaičių tiesėje naudojantis skriestuvu ir liniuote galima taip: skaičių tiesėje iš pradžių atidedame statinį $a = 1$. Iš gauto taško $A$ iškeliame ilgio $b = 3$ statmenį $AB$. Tuomet įžambinės $OB$ ilgis yra $\sqrt{10}$. Pastatę skriestuvo kojelę taške $O$, atidedame $OB = \sqrt{10}$ ilgio atkarpą skaičių tiesėje ir pažymime tašką $C$. Taigi skaičių $\sqrt{10}$ vaizduoja taškas $C$.




Tokiu pat būdu galima atidėti skaičius:
b) $\sqrt{13}$, imant $a = 2$, $b = 3$;
c) $\sqrt{17}$, imant $a = 1$, $b = 4$;
d) $\sqrt{34}$, imant $a = 3$, $b = 5$;
e) $\sqrt{8}$, imant $a = 2$, $b = 2$.
f) Stačiojo trikampio, kurio vieno statinio ilgis $a = 1$ ir įžambinės ilgis $c = 4$, antrojo statinio ilgis yra $\sqrt{15}$. Todėl šį skaičių skriestuvu ir liniuote skaičių tiesėje atidėsime taip: iš taško $O$ į kairę atidėkime ilgio $a = 1$ atkarpą $OA$, o iš taško $A$ į dešinę — ilgio $b = 4$ atkarpą $AE$. Iš taško $O$ iškelkime statmenį ir jame atidėkime tašką $B$ ($AB = AE = 4$). Tuomet statinio $OB$ ilgis yra $\sqrt{15}$. Įstatę skriestuvo kojelę į tašką $O$, atidėkime šią atkarpą skaičių tiesėje. Taigi skaičių $\sqrt{15}$ vaizduoja taškas $C$.




g) Skaičių $\sqrt{21}$, imant $a = 2$, $c = 5$ galima atidėti analogiškai kaip f) punkte.
*Pastaba.* Žinoma, tai ne vienintelis brėžimo būdas. Pavyzdžiui, turint atkarpą $\sqrt{13}$, nesunkiai galima atidėti ir atkarpą $\sqrt{17}$. Tereikia nubrėžti statųjį trikampį, kurio statinių ilgiai yra $a = \sqrt{13}$, $b = 2$. Tada įžambinės ilgis $c = \sqrt{17}$.

**21.** a) $\sqrt{10} > 3$; b) $7 < \sqrt{50}$; c) $-\sqrt{5} < -2{,}2$; d) $-3{,}6 > -\sqrt{13}$;
e) $\sqrt{23} < \sqrt{17} + \sqrt{6}$; f) $\sqrt{15} < \sqrt{3} + \sqrt{5}$; g) $\sqrt{21} > \sqrt{3} + \sqrt{7}$.

**22.** a) $3 < \sqrt{15} < 4$; b) $-5 < -\sqrt{17} < -4$; c) $3 < \sqrt{11} < 4$;
d) $-4 < -\sqrt{10} < -3$; e) $1 < \sqrt{3{,}6} < 2$; f) $-4 < -\sqrt{12{,}2} < -3$.

**23.** a) $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$; b) $-1{,}8 < -\sqrt{3} < -1{,}7$; c) $4{,}1 < \sqrt{17} < 4{,}2$;
d) $-3{,}9 < -\sqrt{15} < -3{,}8$.

**24.** a) 0,67; b) 0,143; c) 0,3636; d) 0,538462.

**25.** a) 2,828; b) 3,162; c) −3,317; d) −3,873.

**26.** a) $= 1{,}2$; b) $\approx -0{,}581$; c) $\approx 0{,}89$; d) $\approx 0{,}86$.

## 1.5. Realieji skaičiai

Šiame skyrelyje apžvelgiamos ir susisteminamos žinios apie skaičius.

Racionalieji skaičiai — tai skaičiai, kuriuos galima išreikšti sveikųjų skaičių santykiais $\frac{m}{n}$. Dažniausiai racionalieji skaičiai reiškiami paprastosiomis trupmenomis: vardiklis $n$ yra natūralusis skaičius, skaitiklis $m$ — sveikasis skaičius.

Atliekant aritmetinius veiksmus su racionaliaisiais skaičiais (sudedant, atimant, dauginant ir dalijant) vėl gaunami racionalieji skaičiai. Tačiau ne visi skaičiai yra racionalieji. Tie skaičių tiesės taškais vaizduojami skaičiai, kurie nėra racionalieji, pavadinami iracionaliaisiais. Racionalieji ir iracionalieji skaičiai kartu sudaro realiųjų skaičių aibę.

Visiškai pakaks, jeigu jūsų mokiniai į klausimą „kas yra realusis skaičius?" mokės atsakyti taip: „tai skaičius, kurį galima pavaizduoti skaičių tiesės tašku", arba — „tai skaičius, turintis savo vietą skaičių tiesėje". Ir žinos, kad realusis skaičius yra arba racionalusis, arba iracionalusis.

Pabrėžkime, kad su dviem realiaisiais skaičiais galima atlikti tuos pačius aritmetinius veiksmus, kaip ir su racionaliaisiais skaičiais: sudėtį, atimtį, daugybą, dalybą (išskyrus dalybą iš nulio). Veiksmų taisyklės yra taip pat tos pačios.

Jeigu yra laiko, galima patyrinėti, koks rezultatas gaunamas, kai atliekami aritmetiniai veiksmai su dviem realiaisiais skaičiais, iš kurių vienas yra racionalusis, o kitas — iracionalusis (arba abu iracionalieji). Galima pasiūlyti panagrinėti tai savarankiškai.

Kita svarbi šio skyrelio tema — skaičių palyginimas. Galima pabrėžti, kad palyginti du skaičius — reiškia nustatyti, kuris skaičius skaičių tiesėje pavaizduotas kairiau kito. Tai ne visada galima pasakyti vien pažiūrėjus į duotųjų skaičių išraiškas. Tada skaičiuojamas duotųjų skaičių skirtumas; išnagrinėkite pateiktą skaičių lyginimo pavyzdį.

Svarbiausios realiųjų skaičių aibės — intervalai. Pasiūlykite patyrinėti brėžinį vadovėlio 30 puslapyje. Pabrėžkite, kad intervalą galima užrašyti dvejopai: nelygybe arba naudojant intervalo žymenis.

Galima pasiūlyti įsivaizduoti atvirąjį intervalą. Galima įsivaizduoti, kad artėjama prie vieno jo galo, „praeinant" vis mažesnius ir mažesnius skaičius..., o paties mažiausiojo intervalo skaičiaus nėra!

Paskutinė skyrelio tema — skaičių palyginimo savybės. Jos išvardytos 30 puslapyje, viena iš jų griežtai įrodyta. Aiškinant jas, galima pasitelkti geometrinę interpretaciją. Nubrėžkime, pavyzdžiui, skaičių tiesę ir atidėkime joje skaičius $a$ ir $b$, $a < b$. Imkime kitą skaičių $c$. Kaip skaičių tiesėje pavaizduosime skaičius $a + c$, $b + c$? Skaičius $a \cdot c$, $b \cdot c$?

***Įsivaizduojame ir suvokiame:***

realiųjų skaičių aibę remdamiesi skaičių tiesės vaizdiniu;

realiųjų skaičių veiksmai paklūsta tiems patiems dėsniams, kaip ir racionaliųjų skaičių veiksmai.

***Mokame:***

palyginti du realiuosius skaičius, suskaičiavę jų skirtumą;

remtis skaičių palyginimo savybėmis;

panaikinti iracionalumą reiškinio vardiklyje.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

27 uždavinys skiriamas realiųjų skaičių palyginimo ir modulio sąvokų įsisavinimui. 28 uždavinyje reikia pertvarkyti iracionaliuosius reiškinius taip, kad vardikliuose neliktų iracionalumų. Šis metodas dažnai praverčia prastinant sudėtingesnius iracionaliuosius reiškinius (29 uždavinys). Paskutinieji keturi uždaviniai (30–33) primena, kad realieji skaičiai ir jų apvalinimas vartojamas ir sprendžiant praktiškesnius uždavinius.

**27.** a) 1; b) 1; c) $-2$; d) $-1$.

**28.** a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; c) $-1-\sqrt{2}$; d) $2-\sqrt{3}$; e) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$; f) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$;
g) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4}$; h) $\frac{2}{31}(4\sqrt{10}+\sqrt{5}+7\sqrt{2}-6)$; i) $\frac{1}{12}(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{30})$;
j) $0{,}3(3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{42})$.

**29.** a) 6; b) 2; c) 33; d) 0,5.

**30.** Šiuo vamzdžiu per 1 s pratekės $\frac{\pi\cdot 0{,}05^2}{3}\cdot 0{,}5 \approx 0{,}00131\ \mathrm{m}^3$, o per 2 valandas — $0{,}00131\cdot 7200 \approx 9{,}4\ (\mathrm{m}^3)$ vandens.

**31.** Pažymėję traukinio ilgį $a$ m, o jo greitį $v$ m/s, gausime lygčių sistemą:
$$\begin{cases} \frac{a}{v} = 7, \\ \frac{a+100}{v} = 20 \end{cases} \Rightarrow v \approx 7{,}69\ \mathrm{m/s}.$$

**32.** Pritaikę Herono formulę, gausime $S \approx 7{,}6\,\mathrm{cm}^2$.

**33.** Jeigu pradinis vandens aukštis buvo $h$ cm, o įmetus kubą — $h_1$ cm, tai:
$h_1 = \frac{16\pi h+125}{16\pi} = h + \frac{125}{16\pi} \Rightarrow h_1 - h = \frac{125}{16\pi} \approx 2{,}5\ (\mathrm{cm})$.

# 2. LAIPSNIAI IR ŠAKNYS

## 2.1. Laipsniai su sveikaisiais rodikliais

Šio skyrelio medžiaga moksleiviams nėra nauja. Tačiau ją būtina pakartoti, kad naujos šio skyriaus sąvokos — šaknys ir laipsniai su racionaliaisiais rodikliais — būtų geriau suvokiamos kaip jau žinomų sąvokų apibendrinimai.

Skyrelio medžiagą galima pradėti dėstyti, pavyzdžiui, taip.

Pasirinkus vieną skaičių ir vieną aritmetinį veiksmą, galima sudaryti be galo daug skaičių. Pavyzdžiui, pasirinkus skaičių $a = 2$ ir sudėties veiksmą, galima sudaryti visus skaičiaus $a$ kartotinius:

$$2, \quad 2+2=4, \quad 4+2=6, \quad 6+2=8, \ \ldots$$

Jeigu vietoj sudėties imtume daugybą, taip pat gautume be galo daug skaičių:

$$2, \quad 2\cdot 2=4, \quad 4\cdot 2=8, \quad 8\cdot 2=16, \ \ldots$$

Šie skaičiai vadinami skaičiaus 2 laipsniais.

Dabar jau galima pateikti ir paaiškinti bendrąjį realiojo skaičiaus laipsnio su natūraliuoju rodikliu apibrėžimą.

Užrašius dvejeto laipsnių seką patogu paaiškinti 4), 5) ir 6) laipsnių savybes: dauginant laipsnius vėl gaunamas laipsnis su tuo pačiu pagrindu; dalijant laipsnį, kurio rodiklis didesnis, iš laipsnio su mažesniu rodikliu, vėl gaunamas laipsnis su tuo pačiu pagrindu.

Galbūt verta iš karto pereiti prie laipsnių su neigiamais rodikliais sąvokos. Galima paklausti: o ką gausime, jei laipsnį su mažesniu rodikliu padalysime iš laipsnio su didesniu rodikliu? Pavyzdžiui,

$$\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^2}.$$

Laipsnis vėl pasirodo, tik šįkart vardiklyje. Sakoma, kad gautas skaičiaus 2 laipsnis su rodikliu $-2$.

Dabar jau galima pateikti ir paaiškinti bendrąjį laipsnio su neigiamu (ir nuliniu) laipsnio rodikliu apibrėžimą.

Konstatuokime, kad jau apibrėžti realiųjų skaičių laipsniai su bet kokiais sveikaisiais rodikliais. Apžvelkime jų savybes. Formaliai jų įrodinėti neverta, tačiau galima pasirinkti vieną jų ir parodyti, kad ji teisinga su konkrečiomis $a$, $m$, $n$ reikšmėmis. Skaičiavimai iliustruos ir bendrųjų savybių įrodymo samprotavimus.

Lieka panagrinėti keletą laipsnių savybių taikymo skaičiavimuose pavyzdžių.

***Įsivaizduojame, suvokiame, žinome:***

kas yra realiojo skaičiaus laipsnis sveikuoju rodikliu;
veiksmų su laipsniais savybes.

***Mokame:***

pertvarkyti reiškinius, taikant laipsnių savybes;
užrašyti duotąjį skaičių standartiniu pavidalu.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Prisiminę laipsnių su sveikaisiais rodikliais savybes, nesunkiai išspręsime 34 uždavinį. Jeigu mokiniai šias savybes prisimena ir sėkmingai jas taiko, tai iškart galima pereiti prie 35 — sudėtingesnio uždavinio. Kai kuriuos šio uždavinio punktus galima pasiūlyti išspręsti namuose. 36–40 uždaviniai — fizikiniai (visų jų irgi nebūtina išspręsti). Tačiau čia svarbu, kad mokiniai gerai mokėtų vartoti standartinę skaičiaus išraišką — taip dažnai užrašomi labai dideli ir labai maži skaičiai.

**34.** a) $\frac{1}{8}$; b) $-2$; c) $\frac{1}{16}$; d) 7; e) $-9999$; f) 121; g) $-3\frac{6}{25}$; h) 64; i) $\frac{16}{81}$; j) $-\frac{8}{13}$; k) 8; l) 1; m) $-125$.

**35.** a) $6{,}2\cdot 10^{13}$; b) $1{,}995\cdot 10^{2}$; c) $3{,}87\cdot 10^{2}$; d) $6{,}4\cdot 10^{-7}$; e) $-3{,}92\cdot 10^{-6}$.

**36.** a) $1{,}08\cdot 10^{9}$ km; b) $2{,}592\cdot 10^{10}$ km; c) 300 km.

**37.** a) $5{,}98\cdot 10^{9}$ km; b) $5{,}75\cdot 10^{7}$ km.

**38.** a) $\approx 19$ kartų; b) $\approx 5994$ kartų.

**39.** $\approx 3{,}34\cdot 10^{28}$.

**40.** $1{,}7\cdot 10^{5}$ t.

## 2.2. $n$-tojo laipsnio šaknys

Skyrelio turinys toks: $n$-tojo laipsnio šaknies sąvoka, savybės, jų taikymo pavyzdžiai.

Šaknis galima pradėti nagrinėti nuo pasiūlymo įsižiūrėti, pavyzdžiui, į lygybes: $2^3 = 8$, $3^4 = 81$.

Galima pasiūlyti įsivaizduoti, kad skaičiai 8 ir 81 yra tarsi „išaugę“ iš skaičių 2 ir 3 lyg iš šaknų. Taigi skaičius 2 yra skaičiaus 8 trečiojo laipsnio šaknis, skaičius 3 yra skaičiaus 81 ketvirtojo laipsnio šaknis. Terminas „šaknis“, beje, ir atsirado iš panašaus įsivaizdavimo. Dažniausiai tikslios šaknies reikšmės negalima užrašyti (žinome, kad iracionaliųjų skaičių iš viso negalima tiksliai užrašyti dešimtainėmis trupmenomis), tačiau galima šaknį bent pažymėti.

Dabar jau galima pateikti ir aptarti $n$-tojo laipsnio šaknies iš neneigiamųjų skaičių sąvoką.

Toliau galima dėstyti medžiagą taip: iš pradžių aptarti šaknų savybes, o po to nelyginio laipsnio šaknies iš neigiamo skaičiaus sąvoką.

Užrašius šaknų savybes žodžiais, galima jas pakomentuoti taip:

1 savybė: šaknis iš sandaugos — šaknų sandauga;

2 savybė: šaknis iš dalmens — šaknų dalmuo;

3 savybė: šaknis iš šaknies — nauja šaknis;

4 savybė: šaknis iš laipsnio — šaknies laipsnis;

5 savybė: pošaknio laipsnio rodiklį ir šaknies laipsnio rodiklį galima suprastinti iš bendrojo daliklio.

Dar kartą verta pabrėžti: šaknys iš neneigiamų skaičių yra neneigiami skaičiai (neneigiami skaičiai gali „išaugti“ tik iš neneigiamų šaknų). Dabar patogu paaiškinti, lygybes $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt[4]{a^4} = |a|, \ldots$

Skyrelio medžiagos dėstymą galima užbaigti nelyginio laipsnio šaknies iš neigiamų skaičių sąvokos dėstymu. Parodykime, kad nelyginio laipsnio šaknys iš neigiamų skaičių visada gali būti pakeistos nelyginio laipsnio šaknimis iš teigiamų skaičių (iškeliant minusą prieš šaknies ženklą). Todėl atskirai neigiamų šaknų savybių nagrinėti nereikia.

***Suvokiame ir žinome:***

bet kurio laipsnio šaknis iš neneigiamo skaičiaus yra neneigiamas skaičius;

iš neigiamų skaičių galima traukti tik nelyginio laipsnio šaknis;

šaknų savybes.

***Mokame:***

patikrinti, ar duotas skaičius yra kito skaičiaus nurodyto laipsnio šaknis;

taikyti šaknų savybes skaičiuojant.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

41–44 uždaviniai skirti šaknų savybių įsisavinimui ir jų taikymui įvairiais atvejais. Pratimų čia kiek daugiau, todėl dalį jų galima užduoti namų darbams. 45 uždavinys atkreipia dėmesį į šaknimis išreikštų skaičių palyginimą. 46–48 uždaviniai truputį sudėtingesni, tačiau taikant šaknų savybes irgi nesunkiai sprendžiami.

**41.** a) 4; 7; 8; b) 2; 3; 2; c) $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{3}$; d) 0,5; 0,5; 0,1.

**42.** a) 9, 25, 5; b) 6, 6, 15; c) 2, 3, 4; d) 6.

**43.** a) $4\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{3}$; c) $21\sqrt[3]{2}$; d) $\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{3}$.

**44.** a) $-2$; b) $-9$; c) neapibrėžtas; d) 4,5; e) 0,25; f) 3; g) $-4$; h) $-12$; i) 9; j) 2,5; k) 2.

**45.** a) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[6]{5}$; b) $\sqrt[4]{8} < \sqrt{3}$; c) $\sqrt[3]{5} > \sqrt{2\sqrt[3]{3}}$; d) $\sqrt{2} > \sqrt[6]{7}$; e) $\sqrt[3]{7} < \sqrt{3\sqrt[3]{2}}$; f) $\sqrt[5]{5} < \sqrt[6]{6\sqrt[5]{3}}$.

**46.** a) Taip; b) taip.

**47.** a) 2; b) $-1$; c) 5; d) 6; e) 2;

f) $$\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{(3-2\sqrt{2})^2}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}} \cdot \sqrt{2} =$$
$$= 3 - 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = 3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1 =$$
$$= 4 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

**48.** a) Pastebėję, kad $57+40\sqrt{2} = (5+4\sqrt{2})^2$, $57-40\sqrt{2} = (5-4\sqrt{2})^2$, gauname:
$$\sqrt{57 + 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} = 5 + 4\sqrt{2} + 5 - 4\sqrt{2} = 10;$$
b) $29 + 12\sqrt{5} = (3 + 2\sqrt{5})^2$, $29 - 12\sqrt{5} = (3 - 2\sqrt{5})^2$, todėl
$$\sqrt{|12\sqrt{5} - 29|} - \sqrt{|12\sqrt{5} + 29|} = 2\sqrt{5} - 3 - 2\sqrt{5} - 3 = -6.$$

*Pastaba.* Nustatyti, kad $57 + 40\sqrt{2}$ yra dvinario kvadratas, galima taip. Spėjame, kad $57 + 40\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$ ($a$ ir $b$ — sveikieji, o gal racionalieji skaičiai). Taigi užtenka rasti tokius $a$ ir $b$, kad būtų $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 57, \\ ab = 20. \end{cases}$ Ieškome bent vieno sveikojo sprendinio — nesunkiai nustatome, kad tinka $a = 5$, $b = 4$. Ir iš tikrųjų $(5 + 4\sqrt{2})^2 = 57 + 40\sqrt{2}$. Panašiai elgiamės ir kitais atvejais.

## 2.3. Laipsniai su racionaliaisiais rodikliais

Pirmiausiai pabrėžkime, kad jau žinome, kas yra laipsnis su sveikuoju rodikliu. Dabar laipsnio sąvoką dar labiau praplėsime, kad laipsnio rodikliu galėtume imti bet kurį racionalųjį skaičių. Teigiamo skaičiaus laipsnį racionaliuoju rodikliu reikia apibrėžti taip, kad apibrėžimas derintųsi su tuo, ką jau žinome apie laipsnius ir šaknis. Pavyzdžiui, nesunku įsitikinti, kad teisinga lygybė

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}}.$$

Šia lygybe galima pasinaudoti kaip pavyzdžiu apibrėžiant laipsnį su racionaliuoju rodikliu.

Dabar galima pateikti ir pakomentuoti bendrąjį laipsnio su racionaliuoju rodikliu apibrėžimą.

Iš kur žinoti, ar apibrėžimas bus naudingas? Gal reikėjo apibrėžti kitaip?

Tarsi patvirtinimą, kad pasielgėme teisingai, pabrėžkime teiginį:

*Veiksmų su laipsniais, kurių rodikliai yra sveikieji, taisyklės galioja ir laipsniams su racionaliaisiais rodikliais.*

Taigi ir „naujoje aplinkoje" galima elgtis taip, kaip esame įpratę.

Suformulavus (tiksliau priminus) veiksmų su laipsniais taisykles, galima iš karto panagrinėti 40 puslapio pirmą pavyzdį, kuris rodo, kaip taisyklėmis naudotis.

Po to galima sugrįžti (jei yra laiko) prie klausimo, kodėl šios taisyklės teisingos. Trumpai galima priminti, kad veiksmų su laipsniais su sveikaisiais rodikliais savybes įrodėme remdamiesi tik apibrėžimu, šaknų savybes įrodinėjome remdamiesi laipsnių su sveikaisiais rodikliais savybėmis, o laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybės išplaukia iš šaknų savybių. Galima įrodyti vieną kurią nors savybę.

Pagaliau verta trumpai aptarti, kodėl laipsnius su racionaliaisiais rodikliais apibrėžėme tik tada, kai pagrindai yra teigiami skaičiai. Skyrelio pabaigoje paaiškinta, kad pabandžius apibrėžti su ta pačia lygybe laipsnius su racionaliaisiais laipsnio rodikliais ir neigiamais pagrindais, susidurtume su prieštaravimais, pavyzdžiui, reikėtų laikyti, kad $8^{\frac{1}{3}}$ ir $8^{\frac{2}{6}}$ reiškia skirtingus skaičius. Kam reikia tokios painiavos? Tiesa, galima apibrėžti nulio laipsnius su teigiamais laipsnio rodikliais (visi jie būtų lygūs nuliui). Tačiau tada reiškiniuose su laipsniais su racionaliaisiais pagrindais tektų nurodyti, kurie pagrindai gali būti lygūs nuliui, kurie ne.

***Suvokiame ir žinome:***

laipsnio su teigiamu pagrindu ir racionaliuoju rodikliu apibrėžimą;

laipsnio su racionaliuoju rodikliu savybes.

***Mokame*** taikyti laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybes pertvarkant skaitinius reiškinius.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Įtvirtinant laipsnio su racionaliuoju rodikliu sąvoką reikėtų išspręsti 49 ir 50 uždavinius. Čia pateikti pavyzdžiai parodo ryšį tarp to paties skaičiaus išraiškos šaknimis ir laipsniu su racionaliuoju rodikliu. Matome, kad gana sudėtingos išraiškos šaknimis (50 a), f)) vartojant laipsnį su racionaliuoju rodikliu užrašomos visai trumpai. 51–55 uždaviniai skirti įsisavinti veiksmams su racionaliaisiais rodikliais. Jie pateikti pradedant lengviausiai sprendžiamais ir baigiant sudėtingesniais. 56 uždavinyje reikia palyginti du skaičius, užrašytus laipsniais su racionaliaisiais rodikliais. Taigi vėl prireiks savybių.

**49.** a) $\sqrt[3]{4}$; b) $\sqrt{\frac{1}{12}}$; c) $\sqrt[4]{27}$; d) $\sqrt{216}$; e) $\sqrt[4]{\frac{1}{7^5}}$; f) $\sqrt[3]{3^7}$.

**50.** a) $2^{\frac{1}{2}}$; b) $3^{\frac{5}{6}}$; c) $5^{\frac{5}{12}}$; d) $2^{-\frac{7}{10}}$; e) $3^{\frac{23}{24}}$; f) $2^{-\frac{1}{4}}$.

**51.** a) 125; b) 100; c) 128; d) 32; e) $\frac{1}{16}$; f) $\frac{1}{243}$.

**52.** a) $a^{\frac{3}{4}}$; b) $a^{\frac{5}{8}}$; c) $a^{\frac{1}{12}}$; d) $a^{\frac{9}{10}}$.

**53.** a) 9; b) 5,2; c) 5,75; d) 2,99; e) 25,5.

**54.** a) $-\frac{5}{36}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $-2$; d) $\frac{1}{3}$.

**55.** a) 7; b) 0,5; c) $\frac{1}{27}$; d) 1;

e) $\frac{125^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+243^{\frac{1}{5}}}{\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot(0,5)^{-2}} = 37\frac{1}{27}$;

f) 1.

**56.** a) $(2,2)^{\frac{2}{5}} < (1,7)^{\frac{3}{5}}$; b) $3^{\frac{6}{7}} > (3,7)^{\frac{5}{7}}$; c) $2^{\frac{5}{6}} < (2,4)^{\frac{2}{3}}$; d) $2^{\frac{1}{3}} > 3^{\frac{1}{5}}$; e) $7^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$; f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; g) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

# 3. ALGEBRINIAI REIŠKINIAI

## 3.1. Reiškinių įvairovė

Raidiniai reiškiniai matematikoje atsirado palyginti neseniai. Antikos matematikai nei skaičių žymėjimo raidėmis, nei formulių nenaudojo. Visus samprotavimus ir skaičiavimus jie aprašydavo žodžiais. Mums, įpratusiems prie lakoniškos formulių kalbos, jų tekstus skaityti būtų sunku.

Skaičius žymėti raidėmis ir nagrinėti raidinius reiškinius pradėjo F. Vijetas. Tai labai supaprastino matematinių samprotavimų dėstymą. Iš tikrųjų, vietoj sakinio „imkime du bet kokius realiuosius skaičius ir sudarykime jų sumą“ galima pasakyti labai trumpai: „nagrinėkime reiškinį $a + b$“. O vietoj sakinio „imkime du bet kokius realiuosius skaičius ir juos sudėkime, po to imkime dar vieną skaičių, lygų pirmajam skaičiui ir pridėkime jį prie sumos“, galima pasakyti: „nagrinėkime sumą $a + b + a = 2a + b$“.

Pats reiškinys nėra skaičius, tačiau jis virsta skaičiumi (įgyja skaitinę reikšmę), kai kintamuosius pakeičiame skaičiais (kintamieji įgyja skaitines reikšmes). Ne visada kintamiesiems įgijus reikšmes, galima surasti reiškinio reikšmę. Pavyzdžiui, reiškinio $\frac{a}{b-1}$ reikšmės negalima apskaičiuoti su $a = 2$ ir $b = 1$. Tada sakoma, kad kintamųjų reikšmės nepriklauso reiškinio apibrėžimo sričiai. Reiškinio apibrėžimo sritis kartais nusakoma nelygybėmis. Pavyzdžiui, reiškinio $\frac{a}{b-1}$ apibrėžimo sričiai nusakyti pakanka užrašyti nelygybę $b \neq 1$.

Galima paklausti mokinių, kuo gali skirtis reiškiniai. Jie gali skirtis kintamųjų skaičiumi, veiksmais, kurie atliekami su reiškinio skaičiais ir kintamaisiais ir t. t. Taigi reiškinius galima įvairiai grupuoti. Dažniausiai reiškiniai skirstomi pagal reiškinio veiksmus.

Pavyzdžiui, jeigu kintamieji reiškinyje yra dauginami iš skaičių ar kintamųjų, jeigu jie sudedami ar atimami, jeigu nė iš vieno kintamojo ar reiškinio su kintamuoju nėra dalijama, tai reiškinys vadinamas sveikuoju. Taigi reiškiniai

$$\frac{3}{2}a + b, \quad \frac{x + 2y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 2y)$$

yra sveikieji reiškiniai. Jeigu reiškinyje yra nors kartą dalijama iš kintamojo (ar reiškinio su kintamuoju), tai reiškinys yra trupmeninis. Sveikieji ir trupmeniniai reiškiniai kartu sudaro racionaliųjų reiškinių visumą. Racionaliuosius reiškinius trumpai galima apibūdinti kaip reiškinius, kurie gaunami iš skaičių ir kintamųjų naudojant tik keturis aritmetinius veiksmus.

Žinoma, kartais pertvarkius vienos rūšies reiškinį, gaunamas kitos rūšies reiškinys. Pavyzdžiui, suprastinus trupmeninio reiškinio $\frac{x(x+z)}{x}$ skaitiklį ir vardiklį, gaunamas sveikasis reiškinys $x + z$.

Daug dėmesio reiškinių rūšims aptarti neskirkime. Svarbiau mokėti reiškinius pertvarkyti, o ne atpažinti, kokiai rūšiai jie priklauso.

***Suvokiame ir žinome:***

reiškiniai yra sudaromi iš kintamųjų ir skaičių, naudojant aritmetinius veiksmus, šaknies traukimo ir kėlimo laipsniu veiksmus;

reiškinys nėra skaičius, tačiau suteikus reiškinio kintamiesiems reikšmes, galima apskaičiuoti ir reiškinio skaitinę reikšmę;

reiškiniai gali būti racionalieji ir iracionalieji.

## 3.2. Reiškinių pertvarkymas

Kodėl iš viso pertvarkome reiškinius? Dažniausiai tiesiog siekdami, kad jie supaprastėtų, kad įstačius kintamųjų reikšmes būtų paprasčiau gauti reiškinių skaitines reikšmes. Norėdami suprastinti užrašytąjį reiškinį, galvojame, kokius jame panaudotus veiksmus galima būtų atlikti iki galo, t. y. įrašyti į reiškinį veiksmų rezultatus. Tačiau kartais reiškiniai pertvarkomi norint, kad geriau išryškėtų tam tikros reiškinio savybės. Pavyzdžiui, pertvarkius reiškinį

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

galima padaryti išvadą, kad jis įgyja tik neneigiamas reikšmes. Formulės, kuriomis naudojamės pertvarkydami reiškinius, yra pertvarkytų reiškinių pavyzdžiai. Galima palyginti juos su įrankiais, kuriais apsiginklavę darbuojamės prie sudėtingesnių reiškinių. Galima pabrėžti, kad ta pačia formule galima naudotis dvejopai: kartais formulės kairiosios pusės reiškinys keičiamas dešiniosios pusės reiškiniu, kartais atvirkščiai.

Prisiminti jau žinomas formules, išmokti naujas, „pasimankštinti" jas naudojant ir yra pagrindinis šio skyrelio tikslas. Naująsias formules (su trečiaisiais laipsniais) mokiniams būtų pravartu patiems įrodyti. Juk įrankius, kuriais bus dažnai naudojamasi, reikia gerai pažinti, todėl pravartu „išardyti" ir vėl „sudėti".

Skyrelyje yra pateiktas reiškinio su moduliais pertvarkymo pavyzdys. Reikia pabrėžti, kad pertvarkant reiškinius su moduliais, pravartu pirmiausia nustatyti, su kuriomis reikšmėmis reiškiniai, parašyti po modulių ženklais, lygūs nuliui. Po to atidėjus šias reikšmes skaičių tiesėje, skaičių tiesė suskaidoma į intervalus, kuriuose reiškinį reikia nagrinėti atskirai.

Kartais reiškinį su moduliais galima interpretuoti geometriškai. Pavyzdžiui, skyrelio pirmo pavyzdžio reiškinys

$$|x| + |x-1|$$

reiškia skaičių tiesės taško, atitinkančio skaičių $x$, atstumų iki taškų, atitinkančių skaičius 0 ir 1, sumą. Aišku, kad imdami $x$ iš intervalo $[0; 1]$, gauname vienetą.

***Suvokiame***, kad pertvarkyti reiškinį — tai pakeisti jį kitu, su tomis pačiomis kintamųjų reikšmėmis įgyjančiu tas pačias skaitines reikšmes.

***Mokame*** įrodyti greitosios daugybos formules, naudotis jomis pertvarkant reiškinius.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

57 uždaviniu norima atkreipti dėmesį į algebrinių reiškinių vartojimą vienus dydžius reiškiant kitais, o 58 uždaviniu — kad algebrinis reiškinys gali būti apibrėžtas ne su visomis kintamųjų reikšmėmis. Taigi tik apibrėžimo srityje galimi įvairūs jo pertvarkymai.

Dažnai reiškinys prastinamas nenustačius jo apibrėžimo srities (59 uždavinys), tačiau visvien turima galvoje, kad visi veiksmai atliekami tik apibrėžimo srityje. 60 uždavinys — skaičiavimo užduotis, rodanti reiškinio prastinimo naudą. 61 uždavinys — taip pat reiškinių prastinimas, tik dabar reikia įrodyti tapatybes. Šių tapatybių gana daug, todėl visų jų nagrinėti pamokoje nereikėtų — kai kurias galima užduoti namų darbams. 62 ir 63 uždaviniuose reikia pertvarkyti specifinius algebrinius reiškinius (su modulio ženklu arba šaknimis). Žinoma, čia reikėtų prisiminti ir modulio sąvoką, ir šaknų savybes. 64 uždavinys — kvadratinio trinario savybių prisiminimui.

**57.** 1) $f = 1{,}8c + 32$; 2) $f = 2{,}25r + 32$;
3) iš lygties $1{,}8c + 32 = 2{,}25r + 32$ išreiškiame $c$: $c = 1{,}25r$.

**58.** a) $x \neq 1$, $x \neq -1$, $\frac{2x^2}{x^2-1}$; b) $x \neq 2$, $x \neq -2$, $\frac{2}{4-x^2}$;
c) $x \neq 3$, $x \neq -3$, $\frac{12x}{9-x^2}$; d) $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $\frac{3-x}{x}$;
e) $x \neq \frac{2}{3}$, $x \neq -\frac{2}{3}$, $\frac{1-x}{3x-2}$; f) $x \neq \frac{1}{4}$, $x \neq 1$, $2x$;
g) $a \neq \frac{2}{3}$, $a \neq \frac{3}{2}$, 0.

**59.** a) 2; b) $x + 3$; c) 6;
d) $-\sqrt{x} - 1$. *Nurodymas.* Reiškinį galima suprastinti panaikinus vardiklyje iracionalumą arba skaitiklį išskaidžius dauginamaisiais:
$-x + \sqrt{x} + 2 = -(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)$.

**60.** Pirmųjų dviejų reiškinių (punktų a) ir b)) labai suprastinti nepavyks. Tačiau juos galima užrašyti patogesne $a$ ir $b$ reikšmių įrašymui forma:
a) $\frac{3a^2+2ab^2-1}{2a-b} = \frac{ab(3a+2b)-1}{2a-b}$. Kai $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, tai $3a + 2b = -1$, $ab = -\frac{1}{3}$, $2a - b = -\frac{11}{6}$, ir reiškinio reikšmė lygi $\frac{4}{11}$;
b) $\frac{2ab^2-3a^2b+1}{3a-b} = \frac{ab(2b-3a)+1}{3a-b}$. Kai $a = -0{,}5$, $b = \frac{2}{3}$, tai $ab = -\frac{1}{3}$, $2b - 3a = \frac{17}{6}$, $3a - b = -\frac{13}{6}$, ir reiškinio reikšmė lygi $-\frac{1}{39}$;
c) $\frac{5}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$; 22,5; d) $x + \sqrt{x^2-1}$; $\frac{b}{a}$; e) $x + y$; 10; f) $\frac{1}{ab}$; $\frac{1}{4}$.

**61.** Visos pateiktos tapatybės įrodomos tinkamai pertvarkius algebrinius reiškinius. Įrodysime punkto e) tapatybę:
$\frac{(1+\sqrt{x})(x\sqrt{x}-1)}{1+x+\sqrt{x}} = \frac{(1+\sqrt{x})(x\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)} = \frac{(1-x)(x\sqrt{x}-1)}{1-x\sqrt{x}} = x - 1.$

**62.** a) $-1$, kai $x < 0$; 1, kai $x > 0$;

b) $|x+1| + |x| = \begin{cases} -1-2x, & \text{kai } x \leqslant -1, \\ 1, & \text{kai } -1 < x \leqslant 0, \\ 2x+1, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$

c) 1, kai $x < 0$; 3, kai $x > 0$;

d) 0, kai $x < 0$; 1, kai $x > 0$;

e) $\frac{2x}{\pi+x}$, kai $x < -\pi$ arba $x > \pi$; $\frac{2\pi}{\pi+x}$, kai $-\pi < x \leqslant \pi$;

f) 0, kai $x < 3$; $\frac{2}{5}$, kai $x > 3$;

g) 5, kai $x \leqslant -3$ arba $x > 3$; $2x^2 - 13$, kai $-3 < x \leqslant -2$ arba $2 < x \leqslant 3$; $-5$, kai $-2 < x \leqslant 2$. (*Pastaba.* Šį uždavinį galbūt kai kam lengviau spręsti remiantis funkcijų $y = x^2 - 4$ ir $y = 9 - x^2$ grafikais.)

**63.** a) $|x+2| - |x-2| = \begin{cases} -4, & \text{kai } x \leqslant -2, \\ 2x, & \text{kai } -2 < x \leqslant 2, \\ 4, & \text{kai } x > 2; \end{cases}$

b) $|2x-7| - |5-x| = \begin{cases} 2-x, & \text{kai } x \leqslant \frac{7}{2}, \\ 3(x-4), & \text{kai } \frac{7}{2} < x \leqslant 5, \\ x-2, & \text{kai } x > 5; \end{cases}$

c) $|4-x| + 3 - x + |2-x| + 1 - x = \begin{cases} 10-4x, & \text{kai } x \leqslant 2, \\ 6-2x, & \text{kai } 2 < x \leqslant 4, \\ -2, & \text{kai } x > 4; \end{cases}$

d) $\frac{1}{|x-1|} - \frac{1}{|x-2|} = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)(x-2)}, & \text{kai } x < 1, \\ \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}, & \text{kai } 1 < x < 2, \\ -\frac{1}{(x-1)(x-2)}, & \text{kai } x > 2. \end{cases}$

**64.** *Nurodymas.* Kvadratinis trinaris yra dvinario kvadratas, t. y. $ax^2 + bx + c = (mx + n)^2$ su tam tikrais skaičiais $m$ ir $n$, tik tuomet, kai diskriminantas $D = b^2 - 4ac = 0$.

a) 1 ir $-1$; b) 1; c) 1; d) 2 ir $-2$; e) 3 ir $-3$;

f) $D = (p-2)^2 + 4p = p^2 + 4$. Kadangi $p^2 + 4 > 0$ su visomis $p$ reikšmėmis, tai duotasis reiškinys nėra dvinario kvadratas nė su viena $p$ reikšme.

# 4. LYGTYS, NELYGYBĖS IR JŲ SISTEMOS

## 4.1. Lygtys ir jų sprendiniai

Gauti lygtį labai paprasta. Užrašomi du reiškiniai su tuo pačiu kintamuoju, įterpiamas tarp jų lygybės ženklas, ir lygtis sudaryta.

Užrašius lygtį, vietoj kintamojo galima įrašyti vieną ar kitą skaitinę reikšmę ir apskaičiuoti kairės ir dešinės lygties pusių reiškinių skaitines reikšmes. Šitaip gaunamos ir teisingos, ir neteisingos skaitinės lygybės. O kartais iš viso kurioje nors pusėje (arba abiejose) negaunama skaitinė reikšmė (pavyzdžiui, įstačius į lygtį $\sqrt{x} = x + 1$ reikšmę $x = -1$). Tada sakoma, kad šis skaičius nepriklauso lygties apibrėžimo sričiai.

Taigi lygties apibrėžimo sritį galima paaiškinti taip: ją sudaro tos kintamojo reikšmės, su kuriomis abiejose lygties pusėse gaunamas skaičius.

Ką gi reiškia išspręsti lygtį? — rasti tas kintamojo reikšmes, kurias įstačius į lygtį, gaunamos teisingos skaitinės lygybės, arba įsitikinti, kad tokių reikšmių nėra. Kalbos vaizdumo dėlei lygties reiškinių kintamasis vadinamas nežinomuoju, nors iš tikrųjų ne jis pats nežinomas, bet tos jo reikšmės, su kuriomis jis paverčia lygtį teisinga skaitine lygybe. Kartais, kad būtų trumpiau, sakoma tiesiog: duota lygtis; raskite $x$. Matematinis pokštas: mokinys, kurio paprašyta rasti $x$, įsižiūrėjęs į ant lentos užrašytą lygtį, nudžiugęs bakstelėjo pirštu: Štai!

Kas gi iš tikrųjų vyksta, kai sprendžiama lygtis? Sudėtingesnės lygtys keičiamos paprastesnėmis, tačiau turinčiomis tuos pačius sprendinius. Tai atliekama pertvarkant reiškinius. Tarsi konstruojami laipteliai vedantys prie tokių lygčių, kurias puikiai žinome ir mokame išspręsti.

Kartais šitaip besidarbuojant galima prarasti sprendinius, arba kartu su sprendiniais gauti ir tokias nežinomojo reikšmes, kurios nėra sprendiniai. Kaip tai įvyksta pailiustruokite keliais paprastais pavyzdžiais.

Kada tai įvyksta ir kaip to išvengti? Dažniausiai taip atsitinka, kai abi lygties pusės dauginamos ar dalijamos iš reiškinio, kuris gali būti lygus nuliui. Taigi geriau to nedaryti arba, jeigu jau labai norime, reikia „uždrausti“ tas reiškinį nuliu verčiančias kintamojo reikšmes, prirašius sąlygą „$x \neq \ldots$ “

„Netikriems“ sprendiniams atsijoti, geriausias receptas — patikrinti, ar gautosios reikšmės tinka lygčiai.

***Suvokiame ir žinome:***

lygtis — lygybė, gauta sulyginus du reiškinius, turinčius tą patį kintamąjį (lygties nežinomąjį);

lygties apibrėžimo sritis — tos kintamojo reikšmės, su kuriomis abi lygties pusės pavirsta skaičiais, t. y. yra apibrėžtos;

lygties sprendiniai — kintamojo reikšmės, paverčiančios lygtį teisinga skaitine lygybe;

lygtis sprendžiama keičiant ją paprastesnėmis, tačiau turinčiomis tuos pačius sprendinius (t. y. ekvivalenčiomis) lygtimis.

## 4.2. Racionaliosios lygtys

Reiškiniai būna įvairūs, taigi ir lygčių yra įvairių. Šiame skyrelyje nagrinėjamos lygtys, kurių reiškiniai sudaryti iš kintamojo ir skaičių, panaudojant tik keturis aritmetinius veiksmus, t. y. racionaliosios lygtys.

Tiesinė lygtis $ax = b$, jeigu tik $a \neq 0$, turi vienintelį sprendinį.

Nagrinėjant paprasčiausią kvadratinę lygtį $x^2 = c$, lengvai nustatoma, kiek sprendinių gali turėti bendroji kvadratinė lygtis: nei vieno, lygiai vieną ir du.

Prisiminkime kvadratinės lygties sprendinių formulę. Ji gaunama atlikus paprastus kvadratinio trinario pertvarkius. Galima juos priminti nagrinėjant redukuotąją kvadratinę lygtį:

$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0,$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$

Sudaryti kvadratinę lygtį, turinčią iš anksto nurodytus sprendinius, taip pat labai paprasta. Pavyzdžiui, lygtį, turinčią sprendinius $x_1 = 1, x_2 = 5$, galima sudaryti taip: $(x-1)(x-5) = 0, x^2 - 6x + 5 = 0$. Sudauginus reiškinius verta atkreipti dėmesį, kad koeficientas prie $x$ lygus sprendinių sumai paimtai su priešingu ženklu, o laisvasis narys — sprendinių sandaugai. Tada jau galima pabrėžti, kad tai bendras dėsningumas, taigi — priminti Vijeto teoremą.

Tiesinės ir kvadratinės lygtys — pačios paprasčiausios racionaliosios lygtys. Žmonės jas išmoko spręsti prieš kelis tūkstančius metų. Kubines lygtis išmokta spręsti tik XVI amžiuje. Italų matematikai surado formules, kurios išreiškia kubinių lygčių sprendinius lygčių koeficientais. Ketvirtojo laipsnio lygtims spręsti taip pat yra nelabai sudėtingos formulės. Aukštesnio laipsnio lygčių atvejis žymiai painesnis. Pasirodo, net penkto laipsnio lygtims neįmanoma nurodyti tokios formulės, kuri išreikštų sprendinius per lygties koeficientus naudojant algebrinius veiksmus (sudėtį, atimtį, daugybą, dalybą ir šaknis).

Aiškinti skyrelio medžiagą galima užbaigti pavyzdžiu, kuris parodytų, kaip bet kokia racionalioji lygtis suvedama į lygtį $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$. Belieka paaiškinti, kaip elgtis toliau: spręsti lygtį $A(x) = 0$ ir atmesti tas gautąsias nežinomojo reikšmes, su kuriomis $B(x) = 0$.

***Žinome ir mokame:***

spręsti tiesinę lygtį;

spręsti kvadratinę lygtį;

suvesti bendrąją racionaliąją lygtį į pavidalą $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ ir rasti šios lygties sprendinius.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

65 uždavinys — lygties apibrėžimo srities (lygtį sudarančių reiškinių apibrėžimo sričių sankirtos) nustatymas. 66 uždavinys skirtas lygčių ekvivalentumo sąvokos įtvirtinimui. Ji labai svarbi sprendžiant lygtis. Šio uždavinio penki punktai atskleidžia kai kuriuos lygčių ekvivalentumo aspektus, todėl reikėtų visus juos ir panagrinėti. 67 uždavinys — paprastos racionaliosios lygtys, 68–71 uždaviniai — lygtys su parametru. Išspręsti lygtį su parametru — reiškia rasti jos sprendinius su kiekviena galima parametro reikšme. Nebūtina spręsti visus šiuos uždavinius — pakaktų išspręsti, pavyzdžiui, 69-ąjį.

**65.** a) $x \neq -3$ ir $x \neq -2$; b) $x \neq -2{,}5, x \neq -2$ ir $x \neq 2$; c) $x \in \boldsymbol{R}$;
d) $x \neq -5$ ir $x \neq 5$; e) $x \in \boldsymbol{R}$; f) $x \neq 0$.

**66.** a) Duotos lygtys nėra ekvivalenčios, nes $x = 2$ yra antrosios lygties sprendinys, tačiau nėra pirmosios lygties sprendinys.
b) Lygtys $5 + 2x + \frac{5}{x-2} = 26 - x + \frac{5}{x-2}$ ir $5 + 2x = 26 - x$ yra ekvivalenčios.
c) Lygtys nėra ekvivalenčios.
d) Lygtys yra ekvivalenčios.
e) Lygtys $\frac{2(x-10)}{x^2-13x+30} = 1$ ir $x^2 - 15x + 50 = 0$ nėra ekvivalenčios.

**67.** a) 0; b) 5; c) 2; d) 5; e) 4; f) $\frac{9-\sqrt{17}}{4}, \frac{9+\sqrt{17}}{4}$.

**68.** a) $\frac{p}{p+1}$, kai $p \neq -1$; sprendinių nėra, kai $p = -1$;
b) $\frac{p^2+p+1}{p}$, kai $p \neq 0$; sprendinių nėra, kai $p = 0$;
c) $\frac{1}{p-1}$, kai $p \neq -1$ ir $p \neq 1$; lygtis turi be galo daug sprendinių, kai $p = -1$; sprendinių nėra, kai $p = 1$;
d) $\frac{p+3}{p^2-5p+6}$, kai $p \neq 2$ ir $p \neq 3$; sprendinių nėra, kai $p = 2$ arba $p = 3$.

**69.** a) $(0; +\infty)$; b) $(-6; 3)$; c) tokių $k$ reikšmių nėra;
d) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. *Nurodymas.* Lygties $x(x-1) + |k-1| = 0$ diskriminantas neigiamas, kai $|k-1| > \frac{1}{4}$.

**70.** a) 2,25; b) $-3$ ir 5; c) tokių $p$ reikšmių nėra; d) 1.

**71.** a) $(-\infty; -3) \cup (-3; 6)$; b) $\left(2\frac{2}{3}; 3\right) \cup (3; 4)$; c) $\left(\frac{1}{5}; 1\right) \cup (1; +\infty)$;
d) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

# 4.3. Du lygčių sprendimo metodai

Jeigu lygtis yra tiesinė ar kvadratinė, tai galima pasinaudoti formulėmis ir iškart gauti sprendinius arba įsitikinti, kad jų nėra. O jeigu lygtis nėra tokia paprasta, kad iš karto galėtume ieškoti sprendinių?
Tada pirmiausiai reikia į ją įsižiūrėti.
Pabrėžkime, kokia svarbi matematikoje „ypatingoji nulio savybė": jeigu dviejų skaičių sandauga lygi nuliui, tai bent vienas iš jų (o gal ir abu) lygūs nuliui. Šia savybe nuolat remiamės spręsdami lygtis. Pavyzdžiui, remiantis šia savybe iškart galima pasakyti, kad lygtis

$$(x-1)(x-2)^2=0$$

turi du sprendinius $x=1$ ir $x=2$.
Tačiau lygtys, kurias tenka spręsti, retai būna užrašytos tokiu pavidalu. Taigi gavę lygtį, galbūt ją šiek tiek pertvarkę (pavyzdžiui, panaikinę vardiklius ar sukėlę visus narius į vieną lygties pusę, palikdami dešinėje pusėje vieną nulį), įsižiūrėkime, ar lygties kairiosios pusės negalima išskaidyti dauginamaisiais. Jeigu vienoje lygties pusėje atsirado reiškinių sandauga, o dešinėje — nulis, vadinasi, pradinę lygtį išskaidėme į paprastesnes lygtis. Tokia yra lygčių sprendimo skaidant dauginamaisiais metodo esmė. Ir, ko gero, visos matematinės veiklos esmė: skaidyti sudėtingą uždavinį į keletą paprastesnių. Kaip toj pasakėčioj: visos šluotos neperlauši, o išardęs ir laužydamas po šapelį — išspręsi uždavinį.
Priminkime, kad bandant išskaidyti, dažnai praverčia greitosios daugybos formulės. Verta užsirašyti arba, atsivertus puslapį, žvilgterėti į jas.
Pabrėžkime, kad skaidant dauginamaisiais reikia turėti tam tikrų įgūdžių. Pavyzdžiui, sprendžiant pirmo pavyzdžio lygtį a), skaidymas yra akivaizdus, tačiau sprendžiant lygtį b), reikia į ją įsižiūrėti. Pabrėžkime, kad neretai padeda „plius-minus" metodas, t. y. pridėjus ir atėmus tą patį dydį, lygtis „nesugadinama", tačiau kartais galima jos narius kitaip sugrupuoti. Taip galima išspręsti pirmo pavyzdžio lygtį b).

Galbūt kas nors paklaus: o kaip žinoti, ką pridėti ir atimti? Atsakymas tik toks: jeigu būsite matę ir patys sprendę pavyzdžių, jūsų patirtis pati pašnibždės!
Tačiau kartais, kad ir kiek stengtumėmės, išskaidyti reiškinio vistiek nepavyksta. Tada verta dar kartą įsižiūrėti į lygtį. Ne tik matematikai, bet ir visam gyvenimui svarbi tokia paprasta mintis: geri žymėjimai padeda lengviau suvokti! Jeigu miesto žemėlapyje namai nebūtų pažymėti stačiakampiais ar kitokiais daugiakampiais, bet būtų nupiešti taip, kaip jie iš tikrųjų atrodo, ar būtų lengva tokiu žemėlapiu naudotis?
Taigi spręsdami lygtis, dažnai pasinaudojama nežinomojo keitimo metodu: nauja raide pažymimas ištisas reiškinys. Šitaip irgi bandoma „išskaidyti" pradinės sudėtingos lygties sprendimą į keletą paprastesnių.
Kaip ir ką žymėti? Jeigu pažymima netinkamai, galima gauti lygtį, kuri bus sudėtingesnė ir už pradinę. Svarbiausia, kad įvedus naują nežinomąjį lygtyje, senojo nežinomojo nebeliktų, jis visiškai „pasislėptų" po naujuoju. Galima paminėti, kad pažymėjus vieną lygties reiškinį nauja raide, o kitame palikus tą patį nežinomąjį, nieko nesuprastinsime... Patirtis — vėl geriausias patarėjas, kaip ir ką žymėti.
Jeigu trūksta laiko, kintamojo keitimo metodą galima paaiškinti tik sprendžiant bikvadratines lygtis.

***Žinome:***

sudėtinga lygtis sprendžiama keičiant ją paprastesnėmis;
sudėtinga lygtis dažnai pakeičiama paparastesnėmis išskaidžius vieną lygties pusę dauginamaisiais arba pakeitus kintamąjį.

***Mokame:***

skaidant dauginamaisiais pasinaudoti greitosios daugybos formulėmis ar „plius-minus" metodu;
spręsti bikvadratines lygtis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

72 uždavinio lygtys sprendžiamos perkeliant visus jos narius į vieną lygties pusę, o po to skaidant dauginamaisiais. Žinoma, sprendiniai gali būti tik lygties apibrėžimo sričiai priklausantys skaičiai. 73–75 uždaviniai skirti nežinomojo keitimo metodui įsisavinti. Jeigu 73-ame uždavinyje naujas nežinomasis nurodytas, tai 74-ame ir 75-ame tinkamus keitinius reikia sugalvoti patiems. Turėtų būti nesunku suvokti, kokį reiškinį pateiktose lygtyse reikėtų žymėti nauju nežinomuoju. Čia lygčių gana daug, todėl visas iš eilės spręsti tikrai nebūtina. 76-as uždavinys — taip pat lygties sprendimas, tik uždavinio formulavimas kiek kitoks (prisiminkime, ką vadiname lygtimi). Dar pateikti du tekstiniai uždaviniai (77, 78), kurie nesunkiai sprendžiami sudarius atitinkamas lygtis.

**72.** a) 3; b) $4-\sqrt{5}$, $4+\sqrt{5}$; c) $-1$; d) 5; e) lygtis sprendinių neturi; f) 3; g) lygtis sprendinių neturi; h) 7.

**73.** a) 1,5; 2; b) $-2$; c) $-1$.

**74.** a) $\frac{1}{2}$, 2; b) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$; c) $-2$, $-1$, 0, 1.

**75.** a) Lygtis sprendinių neturi; b) $-3$; $-1$; $1$; $3$; c) $-3$; $-2$; $2$; $3$; d) $-2$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $2$; e) $-1\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $-1$; $\frac{1}{3}$; f) $-2{,}5$; $-0{,}5$; g) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{2}$; h) $1\frac{5}{9}$; $1\frac{7}{9}$.

**76.** a) 1, 4;
b) kai $p \leqslant 3$, tai $p^2 + 9 = 6p + 2(p-3) \Rightarrow p = 3$;
kai $p > 3$, tai $p^2 + 9 = 6p - 2(p-3) \Rightarrow p^2 - 4p + 3 = 0 \Rightarrow \varnothing$.
Taigi duotieji reiškiniai lygūs, kai $p = 3$;
c) kai $p \leqslant 0$, tai $-p - (p-2) = -(p-3) \Rightarrow p = -1$;
kai $0 < p \leqslant 2$, tai $p - (p-2) = -(p-3) \Rightarrow p = 1$;
kai $2 < p \leqslant 3$, tai $p + p - 2 = -(p-3) \Rightarrow \varnothing$;
kai $p > 3$, tai $p + p - 2 = p - 3 \Rightarrow \varnothing$.
Taigi duotieji reiškiniai lygūs, kai $p = -1$ ir $p = 1$.

**77.** Jeigu atstumas tarp miestų yra $d$, tai $\frac{1}{5}d + 60 + \frac{1}{4}d + 20 + \frac{23}{80}d + 25 = d$. Iš čia $d = 400\,\text{km}$.

**78.** Tarkime, kad reikia $x$ kg gėlo vandens.
Tuomet $\frac{(30+x)5}{100} = \frac{8x}{100} \Rightarrow x = 50\,\text{kg}$.

## 4.4. Iracionaliosios lygtys

Iracionaliosios lygtys — tai lygtys, kuriose yra reiškinių su nežinomuoju, parašytų po šaknies ženklu arba keliamų racionaliuoju laipsnio rodikliu. Pradedant temą, dera priminti, iš kokių skaičių galima traukti šaknis ir kokius skaičius galima kelti laipsniais su racionaliaisiais rodikliais.

Iki šiol lygtims pertvarkyti buvo naudojami tokie veiksmai: prie abiejų lygybės pusių pridėdavome tą patį skaičių ar reiškinį, vienoje pusėje pridėdavome ir atimdavome tą patį dydį, daugindavome arba dalydavome abi lygybės puses iš to paties, nelygaus nuliui, skaičiaus. Šiuos veiksmus pritaikę teisingai lygybei, gaudavome teisingą, o klaidingai — klaidingą lygybę.

Sprendžiant iracionaliąsias lygtis naudojamas dar vienas veiksmas: abi lygybės pusės keliamos tuo pačiu laipsniu.

Įsitikinkime, kad iš teisingos lygybės šitaip gaunama nauja teisinga lygybė, pavyzdžiui,

$$2 = 2, \quad 2^2 = 2^2, \quad 2^3 = 2^3, \quad \ldots .$$

Tačiau, jeigu lygybė neteisinga, pakėlę abi puses tuo pačiu laipsniu galima gauti ir teisingą lygybę:

$$2 \neq -2, \quad 2^2 = (-2)^2, \quad 2^3 \neq (-2)^3, \quad \ldots .$$

Taikant šį veiksmą lygtims, kartais galima gauti nežinomojo reikšmę, kuri nėra lygties sprendinys. Panagrinėkime patį paprasčiausią pavyzdį: $\sqrt{x} = -1$.

Vienintelis receptas apsisaugoti nuo „apsišaukėlių sprendinių" — patikrinti, ar jie tinka lygčiai.

Kartais iracionaliąją lygtį spręsti pradedama nuo apibrėžimo srities nustatymo. Tai nėra būtina, tačiau naudinga. Tai šioks toks lygties tyrinėjimas, kartais parodantis, kad ji sprendinių iš viso neturi.

***Žinome:***

kas yra iracionalioji lygtis;

kad kėlimo laipsniu veiksmas lygtį gali suvesti į jai neekvivalenčią lygtį;

kad gavus nežinomojo reikšmes reikia patikrinti, ar jos yra lygties sprendiniai.

***Mokame:***

spręsti iracionaliąsias lygtis kėlimo laipsniu veiksmais „naikindami" šaknis ar laipsnius trupmeniniais laipsnio rodikliais;

taikyti iracionaliosioms lygtims skaidymo dauginamaisiais ir nežinomojo keitimo metodus.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Sprendžiant iracionaliąsias lygtis, lygčių ekvivalentumo klausimas ypač svarbus. „Išsivaduojant" iš šaknų tenka abi lygties puses kelti laipsniu ir todėl galima gauti ne tik duotosios lygties, bet ir kitų lygčių sprendinius. Todėl 79 uždavinį reikėtų spręsti labai įdėmiai. 80 uždavinyje pateikta nemažai iracionaliųjų lygčių pradedant paprastesnėmis ir baigiant pakankamai sudėtingomis. Jeigu laiko nedaug, pakaktų išspręsti a), b) ir e)- j) lygtis. 81 uždavinyje apibrėžimo srities nustatymas iš tikrųjų naudingas (ko negalėtume pasakyti apie ankstesnes lygtis).

**79.** a) Taip; b) ne; c) ne; d) ne; e) taip; f) taip; g) ne.

**80.** a) $-3$, $\sqrt{10}$; b) $2\frac{1}{3}$, 3; c) $-2$, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{3}$; d) $-1$, 3; e) 1; f) 5; g) 3;
h) $-1$; i) 1; j) $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$;

k) 5, $-\frac{30}{127}$. *Sprendimas.* $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = t$, $t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}$, $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{3}{2}$;
$\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 5$, $\sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{30}{127}$;

l) $-6$, 2. *Sprendimas.* Pakėlę abi lygties puses kubu, gausime:
$-3\sqrt[3]{(x+6)^2(x-2)} + 3\sqrt[3]{(x+6)(x-2)^2} = 0 \Rightarrow$
$\sqrt[3]{(x+6)^2(x-2)} = \sqrt[3]{(x+6)(x-2)^2} \Rightarrow$
$(x+6)^2(x-2) = (x+6)(x-2)^2 \Rightarrow$
$(x+6)^2(x-2) - (x+6)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow$
$(x+6)(x-2)(x+6-x+2) = 0 \Rightarrow$
$(x+6)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -6, x_2 = 2.$
Gerai taip pat pasižymėti $\sqrt[3]{x-2} = y$. Tada $x = y^3 + 2$, ir gauname lygtį $\sqrt[3]{y^3+8} = 2 + y$, kurią keliame kubu.

m) $-15$, 13. *Nurodymas.* Pakėlę abi lygties puses kubu ir gautą lygtį pertvarkę, turėsime: $\sqrt[3]{12-x} \cdot \sqrt[3]{x+14} \cdot (\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{x+14}) = -6$.
Kadangi $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{x+14} = 2$, tai $\sqrt[3]{12-x} \cdot \sqrt[3]{x+14} = -3$. Pažymėję $\sqrt[3]{12-x} = u$, $\sqrt[3]{x+14} = v$ ir išsprendę lygčių sistemą $\begin{cases} u + v = 2, \\ uv = -3, \end{cases}$
gausime, $u = -1$, $v = 3$ arba $u = 3$, $v = -1$.
Tada $x = 13$ arba $x = -15$.
Dar paprasčiau pasižymėti, pavyzdžiui, $\sqrt[3]{x+14} = y$. Tada $x = y^3 - 14$, ir gauname lygtį $\sqrt[3]{26-y^3} = 2 - y$, kurią keliame kubu.

n) 7. *Nurodymas.* Šį sprendinį galima pastebėti iš karto. Įrodykime, jog tai vienintelis sprendinys. Lygties apibrėžimo sritis $x \geqslant 3$. Abi lygties puses keliame šeštuoju laipsniu. Tuomet $(x+1)^2 = (x-3)^3$.
Kadangi kairė pusė $\geqslant 16$, tai $(x-3)^3 \geqslant 16$, $(x-3)^3 > 8$, $x-3 > 2$, $x > 5$. Bet kai $x > 5$, tai funkcijos $(x-3)^3 - (x+1)^2$ išvestinė lygi $3x^2 - 20x + 25 = \frac{1}{3}\big((3x-10)^2 - 25\big)$ ir teigiama, taigi funkcija didėja ir reikšmę 0 įgyja vieninteliame taške $x = 7$.
Žinoma, išspręsti racionaliąją lygtį galima ir skaidant:
$x^3 - 10x^2 + 25x - 28 = 0 \Rightarrow$
$x^3 - 3x^2 + 4x - 7x^2 + 21x - 28 = 0 \Rightarrow$
$x(x^2 - 3x + 4) - 7(x^2 - 3x + 4) = 0 \Rightarrow (x-7)(x^2 - 3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 7.$

**81.** *Nurodymas.* Nustatykite lygčių apibrėžimo sritis.

## 4.5. Nelygybės

Skyrelyje aptariama nelygybės su vienu nežinomuoju sąvoka bei primenama, kaip sprendžiamos tiesinės ir kvadratinės nelygybės. Galima pabrėžti panašumą sąvokų, susijusių su lygtimi ir nelygybe: nelygybė, kaip ir lygtis, turi savo apibrėžimo sritį, sprendinius; nelygybės, kaip ir lygties, sprendimas reiškia pradinės nelygybės keitimą paprastesnėmis tol, kol gaunama nelygybė, kurios sprendinius jau galima surasti. Panašūs ir pertvarkiai, kurie atliekami su nelygybėmis: prie abiejų nelygybės pusių galima pridėti tą patį skaičių ar reiškinį (atskiras tokio pertvarkio atvejis — narių perkėlimas į kitą nelygybės pusę pakeičiant ženklą), galima abi nelygybės puses dalyti ar dauginti iš nelygaus nuliui skaičiaus ... Tačiau! Abi nelygybės puses dalijant ar dauginant iš neigiamo skaičiaus, teisinga nelygybė virsta klaidinga ir atvirkščiai! Kad atstatyti „pasaulio tvarką“, nelygybės ženklas apsukamas. Kai dalijama ar dauginama iš teigiamo skaičiaus, nelygybės ženklas lieka tas pats. Iliustruokime tai skaitiniais pavyzdžiais. Toks nevienodumas ir yra priežastis draudimo dauginti ar dalyti nelygybę iš reiškinio su nežinomuoju. Juk su vienomis reikšmėmis reiškinys gali būti teigiamas, su kitomis — neigiamas. Taigi vienu atveju nelygybės ženklą reiktų palikti koks buvęs, kitu atveju — pakeisti. Taigi turėtume daugybos ar dalybos rezultatą užrašyti dvejopai: vieną nelygybę vienoms nežinomojo reikšmėms, kitą — kitoms.

Skyrelyje yra šiek tiek teorinių samprotavimų apie tuos pertvarkius, kuriuos galima atlikti su nelygybėmis. Nenorėta tiesiog surašyti tuos pertvarkius, nepaminint priežasties, kodėl jie „geri“. Norėta pabrėžti, kad tai išplaukia iš realiųjų skaičių savybių. Tuos pertvarkius įtikinamai paaiškinus skaitiniais pavyzdžiais, samprotavimus galima praleisti arba pasiūlyti perskaityti patiems.

Toliau aptariamas tiesinių ir kvadratinių nelygybių sprendimas. Kvadratinių nelygybių sprendimas iliustruotas grafikais. Galima akcentuoti žodžiais sprendimo eigą, pavyzdžiui, taip: išspręsti nelygybę

$$ax^2 + bx + c > 0$$

reiškia surasti, su kuriais $x$ trinario grafikas yra virš $Ox$ ašies ir t. t. Panašiai galima interpretuoti ir tiesinės nelygybės sprendinius.

***Žinome:***

nelygybės sąvoka;
nelygybės sprendinių sąvoką;
kokius pertvarkius ir kaip galima atlikti su nelygybėmis;
kaip nelygybės sprendinius interpretuoti grafiškai.

***Mokame:***

spręsti tiesines nelygybes;
spręsti kvadratines nelygybes.

## 4.6. Nelygybių sprendimas intervalų metodu

Kada paprasta spręsti lygtį? Kai viena jos pusė išskaidyta paprastais (tiesiniais) dauginamaisiais, o kita lygi nuliui. Galima pradėti nuo paprastos nelygybės, pavyzdžiui,

$$(x-1)(x-2) < 0.$$

Pabrėžkime, kad taškas $x = 1$ padalija skaičių tiesę į dvi dalis: vienoje iš jų reiškinys $x - 1$ yra teigiamas, kitoje — neigiamas. Atidėkime tašką $x = 2$ ir paaiškinkime, kaip tiesė pasidalija į tris dalis, kaip surašyti tiesinių daugiklių ženklus, kaip gauti

$$(x-1)(x-2)$$

ženklus, ir — metodo esmė išdėstyta.

Kartais atidėjus tiesėje taškus ir padalijus tiesę į dalis, brėžiama vingiuota linija ir pagal jos „iškilimus“ ir „įdubimus“ užrašomi sprendiniai. Kad tas patogus brėžinys nebūtų vien „automatiniu įrankiu“, pravartu paaiškinti jo prasmę. Galima prisiminti, kad išspręsti nelygybę, kurios vienoje pusėje yra tam tikras reiškinys, o kitoje pusėje nulis, reiškia surasti skaičių tiesėje tas nežinomojo $x$ reikšmes, su kuriomis funkcijos, užrašytos kitoje pusėje, grafiko taškai yra virš $Ox$ ašies. Taigi ta vingiuota linija yra funkcijos grafiko schema. Galima paaiškinti, kaip tą vingiuotą liniją nubrėžti tada, kai sprendžiama, tarkime, nelygybė

$$(x-1)(x-2)^2(x-3) \geqslant 0.$$

Šiame skyrelyje lieka aptarti, kaip intervalų metodą taikyti tada, kai nelygybė sudaryta iš trupmeninių reiškinių, kaip elgtis su dalijimo taškais: kada juos įtraukti į sprendinių aibę, kada neįtraukti. Dar kartą reikia pabrėžti daugybos ar dalybos iš reiškinio su nežinomuoju pavojų. Jeigu reiškinys gali įgyti ir teigiamas, ir neigiamas reikšmes, daugindami tikrai padarysime klaidą.

***Žinome ir mokame:***

taikyti intervalų metodą racionaliosioms nelygybėms spręsti;
paaiškinti, kodėl intervalų metodas „veikia“.

## PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

82 uždavinys skirtas tiesinių nelygybių sprendimui pakartoti (intervalų metodas kol kas nereikalingas). 83 uždavinio nelygybes patogiausia spręsti intervalų metodu. Čia nelygybių gana daug, todėl pakaktų panagrinėti tik kai kurias iš jų. Sudėtingesnes nelygybes, kurių sprendimui reikia daugiau laiko (pavyzdžiui, n)-s)), moksleiviai galėtų išspręsti savarankiškai. 84 uždavinys skirtas nelygybių ekvivalentumo sąvokai įtvirtinti (čia reikėtų išspręsti visas užduotis). 85 ir 86 yra uždaviniai su parametru labai populiaria kvadratinio trinario tema. 87 ir 88 uždaviniai yra dviejų „pakopų" — pirmiau išsprendžiama lygtis, o po to tiriama, kada gautasis sprendinys tenkina vieną ar kitą sąlygą. Paskutinieji penki uždaviniai (89–93) — tekstiniai, kurių sprendimas susiveda į nelygybių sprendimą. Manome, kad tokie uždaviniai lavina mąstymą — būtų gerai, jeigu jiems išspręsti pakaktų laiko.

**82.** a) $(-\infty; 7{,}5)$; b) $[-0{,}5; +\infty)$; c) nelygybė sprendinių neturi; d) $(-\infty; 15)$; e) $(-4{,}25; +\infty)$; f) $[5; +\infty)$.

**83.** a) $[-3; 4)$; b) $(1; 3)$; c) $(7; 8]$; d) $[-2; 6)$; e) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)\cup(1; +\infty)$; f) $\left(\frac{2}{5}; 1\right)$; g) $(-\infty; +\infty)$; h) $(-\infty; 1)\cup(3; 4)$; i) $(-\infty; 1]\cup(2; 6]$; j) $(-3; 3)\cup(5; +\infty)$; k) $(3; 4)$; l) $(-\infty; 1)\cup(2; 3)\cup(5; +\infty)$; m) $[-3; 2]\cup(3; 4)$; n) $(-5; -3)$; o) $(5; 7)$; p) $(2; 4)$; r) $(-\infty; -2)$; s) $\left(\frac{1}{5}; 1\right)\cup(2; +\infty)$.

**84.** a) Taip; b) ne; c) taip; d) ne; e) ne; f) taip; g) taip.

**85.** $m < \frac{1}{4}$ ir $m \neq 0$.

**86.** $m \in (1; 6)$.

**87.** 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. *Sprendimas.* Kai $m = 13$, lygtis sprendinių neturi. Kai $m \neq 13$, tai sprendinys $x = \frac{6m-6}{13-m}$.
Tada $\frac{6m-6}{13-m} > 3 \Rightarrow m \in (5; 13)$.

**88.** 3, 4, 5, 6, 7, 8. *Sprendimas.* Kai $m = 0$ ir $m = 2$, lygtis sprendinių neturi. Kai $m \neq 0$, $m \neq 2$, tai sprendinys $x = \frac{3m+7}{2-m}$.
Tada $\frac{3m+7}{2-m} < -5 \Rightarrow m \in (2; 8{,}5)$.

**89.** Jeigu $n$ — perkamų sąsiuvinių kiekis, tai moksleivis pasirinks tolimesnę parduotuvę, kai: $2x > 1{,}8x + 1 \Rightarrow x > 5$.
*Atsakymas.* 6 sąsiuvinius.

**90.** Tegu $v$ km/h — katerio greitis stovinčiame vandenyje.
Tuomet $\frac{20}{v+3} + \frac{20}{v-3} \leqslant 5 \Rightarrow v \geqslant 9$ (reikšmės $v \leqslant -1$ netinka).

**91.** Sakykime, kad dujų įranga atsipirks po $x$ mėnesių.
Tada $1080 + 150x < 180x \Rightarrow x > 36$.
Taigi dujų įranga atsipirks po $36 : 12 = 3$ metų.

**92.** Tegu pirmasis darbininkas dirbdamas vienas visą darbą atliktų per $x$ valandų, tada antrasis truktų $x + 6$ valandas. Tuomet $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} \geqslant \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < x \leqslant 6$.
*Atsakymas.* 6 valandas.

**93.** Sakykime, kad trupmenos skaitiklis yra $m$, tada trupmena lygi $\frac{m}{m^2+1}$.
Pagal sąlygą $m > 2$ ir $\frac{m+5}{m^2+6} > \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < m < 1 + \sqrt{5} \Rightarrow m = 3$.
*Atsakymas.* $\frac{3}{10}$.

## 4.7. Lygčių ir nelygybių sistemos

Kai ieškoma nežinomųjų reikšmių, su kuriomis kelios lygtys ar nelygybės virsta teisingomis skaitinėmis lygybėmis ar nelygybėmis, sakoma, kad sprendžiama lygčių ar nelygybių sistema.

Šiame skyrelyje nagrinėjamos sistemos, sudarytos iš lygčių bei nelygybių, turinčių tik vieną nežinomąjį. Sprendžiant tokią sistemą, pakanka atskirai išspręsti kiekvieną lygtį ar nelygybę ir atrinkti tas nežinomojo reikšmes, kurios tinka visoms sistemos lygtims ar nelygybėms. Tos nežinomojo reikšmės randamos sudarant sprendinių aibių sankirtą. Verta grafiškai pavaizduoti, kaip ta sankirta sudaroma.

Sistemos, sudarytos iš lygties ir nelygybių, natūraliai gaunamos nagrinėjant lygtis su moduliais. Užtenka panagrinėti trečią ir ketvirtą pavyzdžius. Beje, ketvirto pavyzdžio lygties sprendinius galima iš karto surasti interpretuojant lygtį geometriškai: lygtį $|x-1|+|x-2|=1$ tenkina tie skaičiai, kuriuos vaizduojančių skaičių tiesės taškų atstumų iki skaičių 1 ir 2 taškų suma lygi 1. Taigi sprendinių aibė — intervalo $[1; 2]$ skaičiai.

***Žinome:*** išspręsti sistemą — tai rasti nežinomojo reikšmes, tinkančias visoms sistemos lygtims ar nelygybėms.

***Mokame:***

vaizduoti skaičių tiesėje sprendinių aibes;
vaizduoti ir užrašyti sprendinių sankirtą.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

94 uždavinys skirtas lygčių sistemos sampratai įtvirtinti. Čia reikia išspręsti lygčių sistemas su vienu nežinomuoju. 95 uždavinys — nelygybių su vienu nežinomuoju sistemų sprendimas, 96 — lygtys su moduliu, kurių sprendimas susiveda į lygčių ir nelygybių sistemų sprendimą. 97 uždavinys įdomesnis — reikia nustatyti, su kuriomis parametro reikšmėmis lygtis turi sprendinių. Verta panagrinėti ir atvejus, kuomet lygtis neturi sprendinių. 98 uždavinyje — aštuonios nelygybės, į kurias įeina reiškiniai su modulio ženklu. Šių nelygybių sprendimas reikalauja gana kruopštaus darbo, ypač e) ir g) punktai. Visų aštuonių nebūtina spręsti.

**94.** a) $-2$, 1, 3; b) $-2$; c) 1, 2; d) $-3$, 2.

**95.** a) $(13; 15)$; b) sprendinių nėra; c) $(-\infty; 7)$; d) $(2; 4)$; e) $(-5; -3)$; f) $(-5; -3) \cup (0; 3)$.

**96.** a) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ -x = x+2 \end{cases} \Rightarrow x = -1$; $\begin{cases} x > 0, \\ x = x+2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

b) $\begin{cases} x \leqslant \frac{5}{2}, \\ -2x+5 = x-1 \end{cases} \Rightarrow x = 2$; $\begin{cases} x > \frac{5}{2}, \\ 2x-5 = x-1 \end{cases} \Rightarrow x = 4$;

c) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ -x+1-x+2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$; $\begin{cases} 1 < x \leqslant 2, \\ x-1-x+2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < x \leqslant 2$;

$\begin{cases} x > 2, \\ x-1+x-2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

d) $\begin{cases} x \leqslant \frac{11}{7}, \\ -7x+12+7x-11 = 1 \end{cases} \Rightarrow x \leqslant \frac{11}{7}$; $\begin{cases} \frac{11}{7} < x \leqslant \frac{12}{7}, \\ -7x+12-7x+11 = 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

$\begin{cases} x > \frac{12}{7}, \\ 7x-12-7x+11 = 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

e) $\frac{x+1}{x-1} = \pm 1$; $\frac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow \varnothing$; $\frac{x+1}{x-1} = -1 \Rightarrow x = 0$;

f) $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ \frac{-(x+2)}{2+x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$; $\begin{cases} -2 < x \leqslant 0, \\ \frac{x+2}{x+2} = 1 \end{cases} \Rightarrow -2 < x \leqslant 0$; $\begin{cases} x > 0, \\ \frac{x+2}{2-x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$.

*Atsakymas.* a) $-1$; b) 2 ir 4; c) $[1; 2]$; d) $\left(-\infty; 1\frac{4}{7}\right)$; e) 0; f) $(-2; 0]$.

**97.** a) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ -x+1-2x+3 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ x = \frac{4-p}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{4-p}{3} \leqslant 1 \Rightarrow p \geqslant 1$;

$\begin{cases} 1 < x \leqslant \frac{3}{2}, \\ x-1-2x+3 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x \leqslant \frac{3}{2}, \\ x = 2-p \end{cases} \Rightarrow 1 < 2-p \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant p < 1$;

$\begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ x-1+2x-3 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ x = \frac{p+4}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{p+4}{3} > \frac{3}{2} \Rightarrow p > \frac{1}{2}$.

Taigi visos $p$ reikšmės, su kuriomis lygtis turi bent vieną sprendinį, yra: $p \in [0{,}5; +\infty)$.

b) $\begin{cases} x \leqslant -1, \\ -x-1+x-1 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -1, \\ p = -2; \end{cases}$

$\begin{cases} -1 < x \leqslant 1, \\ x+1+x-1 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x \leqslant 1, \\ x = \frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow -1 < \frac{p}{2} \leqslant 1 \Rightarrow -2 < p \leqslant 2$;

$$\begin{cases} x > 1, \\ x + 1 - x + 1 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ p = 2. \end{cases}$$

Taigi visos $p$ reikšmės, su kuriomis lygtis turi bent vieną sprendinį, yra: $p \in [-2; 2]$.

**98.** a) $\begin{cases} x \leqslant -\frac{4}{3}, \\ -2(3x + 4) < -x + 2 \end{cases} \Rightarrow -2 < x \leqslant -1\frac{1}{3};$

$\begin{cases} -\frac{4}{3} < x \leqslant 2, \\ 2(3x + 4) < -x + 2 \end{cases} \Rightarrow -1\frac{1}{3} < x < -\frac{6}{7};$

$\begin{cases} x > 2, \\ 2(3x + 4) < x - 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Taigi $-2 < x < -\frac{6}{7}$.

Galima abi puses kelti kvadratu:

$(6x + 8)^2 < (x - 2)^2$, $(6x + 8)^2 - (x - 2)^2 < 0$,

$(7x - 6)(5x + 10) < 0$, $\left(x - \frac{6}{7}\right)(x + 2) < 0$.

b) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$;

c) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x(x - 6) + 15 \leqslant -3(x - 1) \end{cases} \Rightarrow \varnothing;$

$\begin{cases} x > 1, \\ x(x - 6) + 15 \leqslant 3(x - 1) \end{cases} \Rightarrow 3 \leqslant x \leqslant 6.$

Taigi $3 \leqslant x \leqslant 6$;

d) $[0; 2]$. *Nurodymas.* Galima pasižymėti $|x - 1| = y$, tada $y^2 + y - 2 \leqslant 0$, $(y - 1)(y + 2) \leqslant 0$. Kadangi $y \geqslant 0$, tai $y \leqslant 1$, $|x - 1| \leqslant 1$, $-1 \leqslant x - 1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

e) $\frac{x^2+3x+14}{-x^2+x-4} \leqslant -2 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 6$; $\frac{x^2+3x+14}{-x^2+x-4} \geqslant 2 \Rightarrow \varnothing$.

Taigi $-1 \leqslant x \leqslant 6$.

Taip pat galima kelti kvadratu:

$\left(\frac{x^2+3x+14}{x^2-x+4}\right)^2 \geqslant 4$, $\left(\frac{x^2+3x+14}{x^2-x+4} + 2\right)\left(\frac{x^2+3x+14}{x^2-x+4} - 2\right) \geqslant 0$,

$\frac{(3x^2+x+22)(-x^2+5x+6)}{(x^2-x+4)^2} \geqslant 0$; $-x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$, nes kiti trinariai teigiami; taigi $x^2 - 5x - 6 \leqslant 0$, $(x + 1)(x - 6) \leqslant 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 6$.

f) $x \leqslant -1$, $x = 0$, $x \geqslant 3$. *Nurodymas.* Nagrinėjame du atvejus: 1) $x = 0$; 2) $x \neq 0$. Pirmu atveju nelygybė teisinga. Antru atveju $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$, $(x + 1)(x - 3) \geqslant 0$.

g) $-2 < x < -\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{2} < x \leqslant 2$;

h) $(-\infty; -199) \cup (-1; 200)$.

## 4.8. Lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos

Pabrėžkime, kad lygties su dviem nežinomaisiais sprendinys yra skaičių pora. Išspręsti sistemą, sudarytą iš lygčių su dviem nežinomaisiais, reiškia surasti visas skaičių poras, su kuriomis lygtys virsta teisingomis skaitinėmis lygybėmis.

Jeigu lygties su vienu nežinomuoju sprendiniai vaizduojami skaičių tiesės taškais, tai lygties su dviem nežinomaisiais sprendiniams pavaizduoti pasitelkiama koordinačių plokštuma.

Pavyzdžiui, lygties $a_1x + b_1y = c_1$ sprendinių aibė vaizduojama plokštumos tiese. Todėl ir pati lygtis vadinama tiesine. Taigi rasti lygčių sistemos, sudarytos iš dviejų tiesinių lygčių, sprendinį yra tas pats, kaip rasti dviejų plokštumos tiesių susikirtimo taško koordinates. Pasitelkus šią geometrinę interpretaciją galima panagrinėti, kiek sprendinių gali turėti tokia lygčių sistema.

Dažnai dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistema sprendžiama pereinant prie vienos lygties su vienu nežinomuoju. Patarkite lygčių sistemos nagrinėjimą pradėti nuo klausimo: ar negalima iš vienos lygties išreikšti vieno nežinomojo kitu ir įstačius į antrą lygtį gauti lygtį su vienu nežinomuoju?

Jeigu tai nėra paprasta atlikti, reikia pabandyti įžvelgti, ar nėra kokio nors būdo pasižymėti lygties reiškinius naujomis raidėmis, kad po pasižymėjimo lygtys supaprastėtų taip, kad naujomis raidėmis pažymėtus nežinomuosius galėtume surasti. Atvejus, kai tai pavyksta padaryti, iliustruoja pirmas ir antras pavyzdžiai. Juos panagrinėjus galima būtų pereiti prie savarankiško uždavinių sprendimo.

Vadovėlyje yra dar vienas pavyzdys, rodantis, kaip spręsti homogenines lygtis. Homogeniniai reiškiniai matematikoje yra labai svarbūs, jie pasitaiko ir mokyklinėje matematikoje (pavyzdžiui trigonometrijoje ar sprendžiant geometrinius uždavinius). Tačiau, jei trūksta laiko, galima šį pavyzdį ir praleisti.

***Žinome:***

kas yra lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendinys;

kaip lygčių sistemą galima interpretuoti geometriškai.

***Mokame:***

spręsti lygčių sistemas išreikšdami vieną nežinomąjį kitu ir suvesdami į vieną lygtį su vienu nežinomuoju;

prastinti lygčių sistemą įvedant naujus nežinomuosius.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

99 uždavinį sudaro 16 lygčių sistemų su dviem nežinomaisiais. Visas jas spręsti tikrai nebūtina — užtektų panagrinėti po keletą įvairių tipų sistemų. 100 ir 101 uždaviniai skirti tiesinių lygčių sistemų su dviem nežinomaisiais analizei. Jas patogiausia aiškinti pasitelkiant geometrinį lygčių sprendinių aibių vaizdavimą. 102 uždavinio sistemų tyrimas susiveda į kvadratinių lygčių sprendinių egzistavimo analizavimą. Iš čia pateiktų užduočių pakaktų išspręsti pora (pavyzdžiui, b) ir c) punktus).

**99.** a) $(-0,6; 2,2)$; b) $(2; 1)$; c) $(0; 2)$; d) $(2; 4)$, $\left(\frac{2}{17}, 4\frac{8}{17}\right)$;
e) $(-6; -2)$, $(-4; -4)$;
f) $(1; 2)$, $(2; 1)$. *Sprendimas.* $(x + y)^2 = (5 - xy)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 25 - 10xy + (xy)^2$. Kadangi $x^2 + y^2 + xy = 7$ (iš sistemos antros lygties), tai $(xy)^2 - 11xy + 18 = 0 \Rightarrow xy = 2$ arba $xy = 9 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$ $(1; 2)$, $(2; 1)$ arba $\begin{cases} x + y = -4, \\ x^2 + y^2 = -2, \end{cases}$ ši sistema sprendinių neturi;
g) $(4; 1)$, $\left(-\frac{2}{3}; 3\frac{1}{3}\right)$;
h) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. *Sprendimas.* Iš antrosios lygties išsireiškiame $x$: $x = \frac{y^2-2}{3y}$. Šią reikšmę įstatę į pirmą lygtį ir suprastinę, gausime: $2y^4 + 7y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = -4$ (sprendinių nėra) arba $y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ arba $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, atitinkamai $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ir $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dar paprasčiau padauginti pirmą lygtį iš 2, o antrą iš $(-3)$ ir sudėti — gauname homogeninę lygtį.
i) $(3; 5)$, $(-8; 5)$, $(-3; -5)$, $(8; -5)$. *Sprendimas.* Sudėję abi lygtis ir padalįję iš 3, gauname: $x^2 + xy + y^2 = 49$. Iš pirmosios lygties atėmę antrąją, gauname: $-x^2 - xy + y^2 = 1$. Sprendžiame sistemą: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49, \\ -x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ $y^2 = 25 \Rightarrow y = 5$ arba $y = -5$, atitinkamai $x = 3$, $x = -8$ arba $x = -3$, $x = 8$. Sprendinius patikriname;
j) $(-1; -1)$, $(2; 2)$. *Nurodymas.* Iš antros lygties $(x - y)^2 = 0$, todėl $x = y$;
k) $(8; 2)$, $(-8; -2)$; l) $(3; 2)$; m) $(4; 2)$;
n) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. *Sprendimas.* Iš pirmos lygties išsireiškiame $y$: $y = |x - 2| - 1$ ir įstatome į antrąją lygtį: $x - \big||x - 2| + 2\big| = -1$.

Kai $x \leqslant 2$, tai $x - |4 - x| = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$;
kai $x > 2$, tai lygtis sprendinių neturi;

o) $(-2; 1)$, $(0; -3)$; $(6; 9)$;

p) $\left(4\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, $\left(-5\frac{3}{4}; 4\frac{7}{8}\right)$. *Sprendimas.* $\begin{cases} x = 4 - 2y, \\ 3|5 - 2y| + 2|y - 2| = 20. \end{cases}$

Kai $y \leqslant 2$, tai $3(5 - 2y) - 2(y - 2) = 20 \Rightarrow y = -\frac{1}{8}$, $x = 4\frac{1}{4}$;
kai $2 < y \leqslant \frac{5}{2}$, tai $3(5 - 2y) + 2(y - 2) = 20 \Rightarrow$ sprendinių nėra;
kai $y > \frac{5}{2}$, tai $-3(5 - 2y) + 2(y - 2) = 20 \Rightarrow y = 4\frac{7}{8}$, $x = -5\frac{3}{4}$.

**100.** a) $a = 5$, $b = -2$ arba $a = -5$, $b = 2$;
b) $a = 6$, $b = -2$ arba $a = -6$, $b = 2$.

**101.** a) $a = -\frac{1}{4}$; b) $a = -2$.

**102.** a) $\left[-\frac{1}{12}; +\infty\right)$; b) $\left[-\frac{1}{15}; +\infty\right)$; c) $(-\infty; 4]$;
d) $\left(-\infty; -\frac{7}{2} - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-\frac{7}{2} + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$.
*Sprendimas.* $y = -\frac{1+x}{2+x}$; $2(1 - p)x^2 + (9 - 2p)x + 8 = 0$;
kai $p = 1$, tai lygtis virsta $7x + 8 = 0$ ir turi sprendinį;
kai $p \neq 1$, tai $D = (9 - 2p)^2 - 64(1 - p) = 4p^2 + 28p + 17 \geqslant 0$.
Vadinasi, išsprendus šią nelygybę reikėtų atmesti $p = 1$, bet kadangi ta reikšmė taip pat gera, tai jos ir atmesti nebereikės. Be to, reikšmė $p = 1$ tenkina nelygybę, taigi ją išsprendę gauname visas tinkamas $p$ reikšmes: $p \in (-\infty; -\frac{7}{2} - 2\sqrt{2}) \cup (-\frac{7}{2} + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

# 5. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

**1.** a) 2; b) 1; c) $-1$; d) 3; e) 0.

**2.** a) 0,3125; b) 0,144; c) 3,(8); d) 2,(27); e) 0,(307692); f) 0,(230769); g) 0,2(56); h) 1,0(1); i) 0,(2352941176470588).

**3.** a) $\frac{61}{9}$; b) $-\frac{271}{99}$; c) $\frac{89}{90}$; d) $\frac{141}{275}$; e) $\frac{6511}{9000}$.

**4.** $\overline{2ab}+9=\overline{2ba}$, $a=0$ arba $a=5$; $200+10a+b+9=200+10b+a$, $9a-9b=-9$, $b=a+1 \Rightarrow a=0$, $b=1$ arba $a=5$, $b=6$.
*Atsakymas.* 201, 256.

**5.** 243.

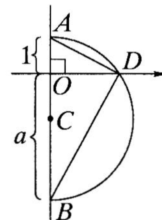
**6.** a) 2; b) $-5$; c) 5;
d) 1.
*Sprendimas.* Kiekvieną sumos dėmenį užrašykime be iracionaliojo vardiklio:
$-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{7})-\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{9})=$
$-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{9})=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{9})=1$;
e) $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$. *Nurodymas.* Kaip ir d) punkte, panaikinę iracionalumą kiekviename iš $n$ dėmenų, gausime atsakymą.

**7.** a) Nelygybę $\sqrt{7}-\sqrt{6}<\sqrt{6}-\sqrt{5}$ užrašykime taip: $\sqrt{7}+\sqrt{5}<2\sqrt{6}$. Pakėlę abi nelygybės puses kvadratu, gausime: $12+2\sqrt{35}<24$, tada $2\sqrt{35}<12$, $\sqrt{35}<6$ ir $35<36$.
b) Nelygybę $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ (kai $n\in N$), užrašykime taip: $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$, tada $\sqrt{n^2-1}<n$, $n^2-1<n^2$.

**8.** a) Skaičių $b$ užrašykime panaikinę vardiklyje iracionalumą:
$b=\frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}=\frac{9(\sqrt{11}+\sqrt{2})}{(\sqrt{11})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}+\sqrt{2}$ ir dabar palyginkime skaičius $a$ ir $b$. Kadangi $a>0$ ir $b>0$, tai jeigu $a>b$, tai ir $a^2>b^2$ ir atvirkščiai. Tarkime, kad $5>\sqrt{11}+\sqrt{2}$. Tuomet $25>13+2\sqrt{22}$, $12>2\sqrt{22}$. $6>\sqrt{22}$, $36>22$. Pastaroji nelygybė iš tikrųjų teisinga, todėl galioja ir pradinė nelygybė, t. y. $5>\sqrt{11}+\sqrt{2}$. Vadinasi, didesnis yra skaičius $a$.
Panašiai samprotaujant galima įrodyti ir punktų b), c) ir d) nelygybes.
*Atsakymas.* a) $a$; b) $b$; c) $b$; d) $a$.

**9.** a) 0,820; b) 2,828; c) 0,026; d) $-4,216$.

**10.** Skaičių tiesėje (joje yra pažymėti 0 ir 1, taigi turime vienetinę atkarpą) galima atidėti bet kurį racionalųjį skaičių $a$. Skaičių $\sqrt{a}$ galima atidėti taip. Išvedę per tašką $O(0)$ statmenį, aukštyn atidedame vienetinio ilgio atkarpą $OA$, o žemyn — $a$ ilgio atkarpą $OB$. Atkarpą $AB$ padalijame pusiau (taškas $C$) ir brėžiame spindulio $CA$ apskritimo lanką. Taškas $D$, kuriame apskritimo lankas susikerta su skaičių tiese, ir žymi skaičių $\sqrt{a}$.

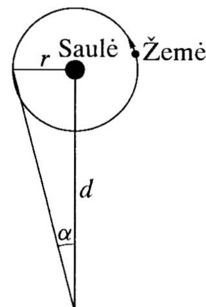



**11.** a) 1200; b) 12; c) $14\sqrt[4]{75}$; d) $\sqrt[12]{\frac{3}{4}}$; e) 0,6; f) $1\frac{8}{9}$; g) $30\frac{3}{8}$; h) $\frac{1}{12}$.

**12.** a) 1; b) $-1$;
c) 1. *Nurodymas.* $9+4\sqrt{2}=(1+2\sqrt{2})^2$, $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$ (žr. 48 uždavinio pastabą, p. 15);
d) 0;
e) 3. *Nurodymas.* $14-6\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^2$;
f) $-2$. *Nurodymas.* $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$.

**13.** $d<a<c<b$. *Nurodymas.* Lengva palyginti duotųjų skaičių septintojo laipsnio šaknis.

**14.** $\approx 3,1\cdot 10^{13}$ km. *Nurodymas.* Jei Žemės orbitos spindulys yra $r$ km, parsekas yra $d$ km, o $\alpha=\left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$, tai reikia surasti atstumą $d=\frac{r}{\operatorname{tg}\alpha}$;
$d\approx\frac{1,5\cdot 10^8}{4,85\cdot 10^{-6}}\approx 3,1\cdot 10^{13}$ km.



**15.** a) $\frac{x-y+z}{x+y-z}$; b) $a-1$; c) $x^3(x+y)$; d) $\frac{a+2}{a+6}$; e) $\frac{3}{x+y}$; f) $\frac{1}{3}(m-5)^2$;
g) $1+\sqrt{\frac{y}{x}}$; h) $\frac{a+2}{2b-3}$.

**16.** a) $\frac{2(2-a)}{a(2+a)}$, $-6\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{x(3-x)}$, $\frac{8}{9}$; c) $1+\frac{5}{x}$, $-19$; d) $ab+\frac{1}{2a-b}$, $1\frac{8}{15}$.

**17.** a) $24\sqrt{10}$; b) $56\sqrt{15}$; c) $2\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{5}$.

**18.** a) $327^3+173^3=(327+173)\cdot(327^2-327\cdot173+173^2)=$
$500\cdot(327^2-327\cdot173+173^2)$ — dalijasi iš 500;
b) $731^3-611^3=(731-611)\cdot(731^2+731\cdot611+611^2)=$
$120\cdot(731^2+731\cdot611+611^2)$ — dalijasi iš 120;
c) $2^{12}+5^9=(2^4)^3+(5^3)^3=16^3+125^3$. Panašiai kaip punkte a), šis skaičius dalijasi iš $16+125$.
d) $2^{10}+5^{12}=(2^5)^2+2\cdot2^5\cdot5^6+(5^6)^2-10^6=(2^5+5^6)^2-(10^3)^2=$
$(2^5+5^6-10^3)\cdot(2^5+5^6+10^3)$. *Pastaba.* Labai sunkus uždavinys.

**19.** a) $-\frac{1}{5}$, kai $x\in(-\infty;0)$; $\frac{9}{5}$, kai $x\in(0;+\infty)$;
b) $-1$, kai $x\in(-\infty;-3)$; $\frac{1}{3}$, kai $x\in(-3;+\infty)$;
c) $\frac{4}{x}$, kai $x\in(-\infty;-2]$; $-2$, kai $x\in(-2;0)\cup(0;2]$; $-\frac{4}{x}$, kai $x\in(2;+\infty)$;
d) $-6$, kai $a\in(-\infty;-4)$; 6, kai $a\in(-4;-3)\cup(-3;+\infty)$;
e) $-x(x+1)$, kai $x\in(-\infty;1)$; $x^2+x+2$, kai $x\in(1;+\infty)$;
f) $-\frac{a}{2}$, kai $a\in(-\infty;-2)$; $\frac{a(a-1)}{2}$, kai $a\in(-2;+\infty)$.

**20.** a) $\frac{2}{11}$; b) 2,5; c) $-4$; d) $-1$; $\frac{5}{6}$; e) $-1$; $-0{,}5$; f) $-0{,}2$; 2; g) $-1$;
h) $-1$; 5; i) 3; 4; j) $-6$; 2.

**21.** a) $m\in(-2;+\infty)$; b) $m=-2$; c) $m\in(-\infty;-2)$.
*Nurodymas.* Kvadratinė lygtis turi du skirtingus sprendinius, kai diskriminantas yra teigiamas; vieną sprendinį (kartais sakoma — du lygius sprendinius), kai diskriminantas lygus nuliui; neturi sprendinių, kai diskriminantas yra neigiamas.

**22.** a) Ne; b) taip; c) ne; d) taip.

**23.** 3; 4. *Nurodymas.* Pastebime, kad antra lygtis $x^2+(m^2-5m+6)x=0$ visada turi sprendinį $x=0$. Pirmoji lygtis turės šitokį sprendinį, kai $m^2-7m+12=0$, t. y. kai $m=3$ arba $m=4$. Patikrinę įsitikiname, kad ir pirmuoju, ir antruoju atveju abiejų lygčių sprendiniai sutampa.

**24.** a) Kvadratinė šaknis visuomet yra neneigiamas skaičius.
b) Neneigiamų skaičių suma lygi nuliui tik tuomet kai šie skaičiai yra nuliai. Sprendžiame sistemą: $\begin{cases}2x+3=0,\\x+3=0.\end{cases}$ Sistema sprendinių neturi, vadinasi, duotoji lygtis taip pat neturi sprendinių.
c) Lygties apibrėžimo sritis tuščia.
d) Lygties apibrėžimo sritis $(-\infty;-1]$. Tačiau šiame intervale lygties dešinioji pusė yra neigiamas reiškinys.
e) Lygties apibrėžimo sritis $[-1;1]$. Tačiau šioje srityje lygties dešinioji pusė yra neigiamas reiškinys.
f) $\sqrt{x-3}=4-x^2$. Šios lygties apibrėžimo sritis $[3;+\infty)$. Kai $x\geqslant3$, tai $4-x^2\leqslant-5$. Taigi lygtis sprendinių neturi.
g) Visoje apibrėžimo srityje $x\geqslant3$ kairė pusė neigiama.
h) Apibrėžimo srityje kairė pusė teigiama.

**25.** a) Ne; b) ne; c) ne; d) taip; e) taip.

**26.** a) 8; b) 1, 4; c) 9; d) 25; e) $-\sqrt{11}$, $-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$; f) $-2$, 6; g) 16;
h) 3. *Sprendimas.* Panaikinę trupmeninių reiškinių vardikliuose iracionalumą, gauname: $\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}\Rightarrow\sqrt{x+1}+1=\sqrt{2x+3}\Rightarrow2\sqrt{x+1}=x+1\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=3$ arba $x=-1$. Tačiau $x=-1$ neįeina į pradinės lygties apibrėžimo sritį.

**27.** a) Taip; b) taip; c) ne; d) ne; e) ne; f) taip; g) ne.

**28.** a) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; b) $(-4;-2)$; c) $[-2;8]$; d) $(-\infty;4{,}5)\cup(5{,}5;+\infty)$;
e) $(-1;3)$; f) $[3;6]$; g) $[0;2]$; h) $(-\infty;-6)\cup(-3{,}5;+\infty)$;
i) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

**29.** a) $-1$, 3, 4; b) 2, 3, 4; c) 6; d) $-4$, $-3$, 4.

**30.** $m\in(-1;7)$.

**31.** $x=0{,}6$. *Nurodymas.* Apibrėžimo sritis yra $x\geqslant0{,}6$. Kadangi su $x=0{,}6$ nelygybė teisinga, tai nieko spręsti nebereikia.

**32.** a) $[2; 3]$; b) $(2; 2\sqrt{2})$; c) $(-\infty; -2] \cup \left[5; 5\frac{9}{13}\right)$; d) $[0; 1)$.

**33.** a) $[0; 1,6] \cup [2,5; +\infty)$; b) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$; c) $(-\infty; 2) \cup (3,5; +\infty)$; d) $[-3 - \sqrt{5}; -4) \cup (-2; 0]$;

e) $[0; 3]$. *Nurodymas.* Lygties apibrėžimo sritis $[0; 3]$. Apibrėžimo srityje abi nelygybės pusės neneigiamos. Keliame kvadratu: $3x - x^2 < (4 - x)^2 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 76 > 0$. Matome, kad su bet kuria reikšme iš apibrėžimo srities $-11x + 76 > 0$.

**34.** a) $(1,5; 1,5)$; b) $(2; 5)$, $(5; 2)$; c) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{9}\right)$; d) $(3; 2)$, $(-3; -2)$;

e) $(0; 0)$, $(-1,2; -1,8)$;

f) $(0; -3,5)$, $(0; 3)$, $(21; 21)$.

*Sprendimas.* $\begin{cases} x = 0, \\ 2y^2 + y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = -3,5 \end{cases}$ arba $\begin{cases} x = 0, \\ y = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 21, \\ y = 21. \end{cases}$

g) $(2; 2)$. *Sprendimas.* $\sqrt{7x + y} = 6 - \sqrt{x + y} \Rightarrow 7x + y = (6 - \sqrt{x + y})^2 \Rightarrow \sqrt{x + y} = 3 - \frac{x}{2}$. Vietoj $\sqrt{x + y}$ į antrąją sistemos lygtį įstatome $3 - \frac{x}{2}$. Gausime: $3 - \frac{x}{2} - y + x = 2 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1$. Šią $y$ reikšmę įstatome į antrąją sistemos lygtį: $\sqrt{\frac{3x}{2} + 1} - \frac{x}{2} - 1 + x = 2 \Rightarrow x^2 - 18x + 32 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 16 \Rightarrow y_1 = 2$, $y_2 = 9$. Skaičių pora $(16; 9)$ nėra pradinės sistemos sprendinys.

Kiek natūralesnis toks būdas. Pasižymėkime $\sqrt{x + y} = z$ $(\geqslant 0)$, tada $x = z^2 - y$. Iš antros lygties $z - y + z^2 - y = 2$, $y = \frac{1}{2}(z^2 + z - 2)$, o tada $x = z^2 - \frac{1}{2}(z^2 + z - 2) = \frac{1}{2}(z^2 - z + 2)$. Įstatome į pirmą lygtį: $\sqrt{3(z^2 - z + 2) + z^2} = 6 - z$, $3(z^2 - z + 2) + z^2 = 36 - 12z + z^2$, $z^2 - z + 2 = 12 - 4z$, $z^2 + 3z - 10 = 0$, $z = 2$ (neigiama reikšmė $z = -5$ netinka). Todėl $x = 2$, $y = 2$.

h) $(-4; 4)$. *Sprendimas.* Iš sistemos pirmosios lygties išreikškime $x$. Turėsime: $x = \frac{-12 - 4|y|}{7} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 4|y| + 7x = -12, \\ -6x + 8 = -xy + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 7x = -12, \\ y = \frac{-6x + 8}{4 - x} > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 4y + 7x = -12, \\ 7x^2 + 8x - 80 = 0, \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4,\ y = 4.$

**35.** Kadangi $y = x - 1$, tai sistemos sprendinių skaičius priklauso nuo lygties $ax^2 + x - 1 = 2$ sprendinių skaičiaus. Kai $a = 0$, tai $x = 3$, $y = 2$.
Kai $a \neq 0$, tai lygtis $ax^2 + x - 3 = 0$ turi vieną sprendinį, kai diskriminantas $1 + 12a = 0$, t. y. $a = -\frac{1}{12}$.
*Atsakymas.* $-\frac{1}{12}$, 0.

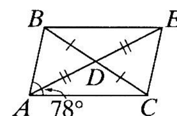
**36.** Jeigu visas kelias yra $s$ km, tai vidutinis greitis bus $s : \left(\frac{s}{320} + \frac{3s}{240}\right) = \frac{960}{15} = 64\,\text{km/h}$.
*Atsakymas.* 64 km/h.

**37.** Tarkime, kad iš rezervuaro į indą abu kartus nupilama po $x$ ℓ. Tuomet rezervuare grynos cheminės medžiagos po dviejų nupylimų lieka $20 - x - \frac{20 - x}{20}x = 3,2 \Rightarrow (20 - x)^2 = 64 \Rightarrow x = 12$; $2x = 24$; inde grynos cheminės medžiagos $x + \frac{20 - x}{20}x = 12 + \frac{8}{20} \cdot 12 = 16,8\,ℓ$; $\frac{16,8}{24} \cdot 100\% = 70\%$.
*Atsakymas.* 24 ℓ, 70%.
*Pastaba.* Iš sąlygos nelabai aišku, kad vanduo abu kartus pilamas į rezervuarą.

**38.** Jeigu $x$ — padidinimo procentas, tai:
$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = 1,3225 \Rightarrow 1 + \frac{x}{100} = 1,15 \Rightarrow x = 15$.
*Atsakymas.* 15%.

**39.** Po 9 mėnesių.

**40.** Sujungus taškus $E$ ir $C$ atkarpa, gaunamas keturkampis $ABEC$, kurio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau. Vadinasi, $ABEC$ — lygiagretainis ir $\angle ABE + \angle BAC = 180°$. Tada $\angle ABE = 180° - 78° = 102°$.




**41.** a) Kadangi $AM = BK$, $MK$ — bendra, $\angle AMK = \angle BKM$, tai $\triangle AMK = \triangle BKM$. Vadinasi, $AK = BM$.

b) Kadangi $\triangle AMK = \triangle BKM$, tai $\angle AKM = \angle BMK$, ir $\triangle MOK$ yra lygiašonis.

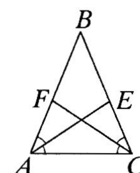
**42.** Kadangi:

a) $BM = CM$, $OM$ — bendra, $\angle OMB = \angle OMC$, tai $\triangle BMO = \triangle CMO$;

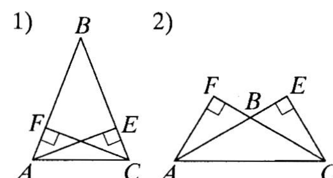
b) $AD = AE$, $AO$ — bendra, $\angle DAO = \angle EAO$, tai $\triangle ADO = \triangle AEO$;

c) $BD = CE$ — duota, $BO = CO$ (iš $\triangle BMO = \triangle CMO$), $DO = EO$ (iš $\triangle ADO = \triangle AEO$), tai $\triangle BDO = \triangle CEO$.

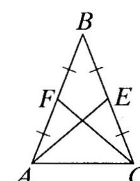
**43.** a) Tegu $AE$ ir $CF$ — lygiašonio trikampio $ABC$ kampų prie pagrindo pusiaukampinės. $\triangle AFC = \triangle CEA$, nes $AC$ — bendra, $\angle FAC = \angle ECA$, $\angle FCA = \angle EAC$. Vadinasi, $CF = AE$.




b) Tegu $AE$ ir $CF$ — lygiašonio trikampio $ABC$ aukštinės, nubrėžtos į šonines kraštines. Kadangi $\angle FAC = \angle ECA$, tai vieno iš trikampių $FAC$ ir $ECA$ du kampai lygūs kito dviem kampams. Tada lygūs ir tretieji kampai, taigi trikampiai lygūs pagal bendrą kraštinę $AC$ ir du kampus prie jos. Todėl $CF = AE$. Panašiai sprendžiame ir bukojo trikampio atveju.

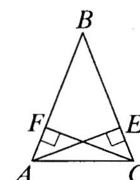



c) Tegu $AE$ ir $CF$ — lygiašonio trikampio $ABC$ pusiaukraštinės, nubrėžtos į šonines kraštines. $\triangle AFC = \triangle CEA$, nes $AF = CE$, $AC$ — bendra, $\angle FAC = \angle ECA$. Vadinasi, $CF = AE$.

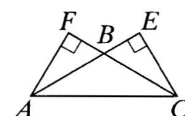



**44.** a) Reikia išnagrinėti tris atvejus: 1) kai abi aukštinės yra trikampio viduje; 2) kai abi aukštinės yra trikampio išorėje; 3) kai viena aukštinė yra trikampio viduje, o kita — išorėje.

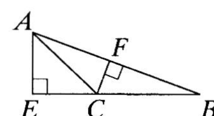
*I būdas.* 1) Tegu $AE = CF$ — trikampio $ABC$ aukštinės. Statieji trikampiai $AFC$ ir $CEA$ lygūs pagal statinį ir įžambinę. Iš jų lygumo išplaukia, kad $\angle FAC = \angle ECA$, taigi $\triangle ABC$ yra lygiašonis.




2) atveju sprendimas panašus.

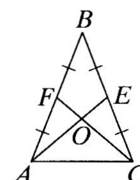



3) atvejis sunkesnis. Trikampiai $FBC$ ir $EBA$ panašūs, ir pirmo statinis $FB$ mažesnis už antro: $FB < BC < BE$. Todėl ir kitas statinis mažesnis: $FC < AE$. Taigi 3) atveju aukštinės negali būti lygios.

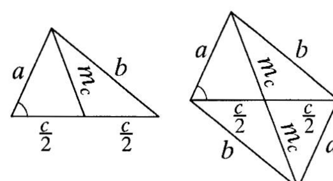



*II būdas.* Sprendžiant geometriškai, dažnai tenka nagrinėti kelis atvejus. Labai dažnai skaičiavimo būdas („be brėžinio") to nereikalauja. Taip yra ir šiame uždavinyje. Iš tikrųjų, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CF = \frac{1}{2}BC \cdot AE$. Kadangi $AE = CF$, tai $AB = BC$.

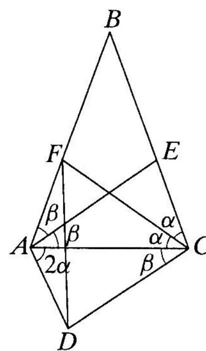
b) *I būdas.* Tegu $AE = CF$ — trikampio $ABC$ pusiaukraštinės; $O$ — jų susikirtimo taškas. Pagal trikampio pusiaukraštinių savybę $AO = \frac{2}{3}AE$, $CO = \frac{2}{3}CF$, todėl $AO = CO$, taigi $\angle OAC = \angle OCA$. $\triangle AEC = \triangle CFA$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Vadinasi, $\angle FAC = \angle ECA$, taigi $\triangle ABC$ — lygiašonis.




*II būdas.* Remkimės gerai žinoma pusiaukraštinės $m_c$, išvestos į kraštinę $c$, išraiška kraštinėms $a, b, c$: $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$ (ją paprasta įrodyti remiantis kosinusų formule arba lygiagretainio įstrižainių savybe). Sakykime, jog $m_a = m_b$. Tada lygybių $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ ir $4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ kairiosios pusės lygios, todėl $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \Rightarrow 3a^2 = 3b^2 \Rightarrow a = b$.

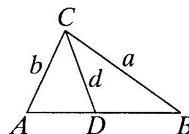


c) *I būdas.* Tegu $AE = CF$ — trikampio $ABC$ pusiaukampinės. Pažymėkime $\angle ACB = 2\alpha$ ir $\angle CAB = 2\beta$. Galime laikyti, kad $\alpha \geqslant \beta$. Papildykime $\triangle AEC$ iki lygiagretainio $AECD$ ir sujunkime $D$ su $F$. Trikampių $ACF$ ir $ACD$ kraštinė $AC$ bendra, $CD = CF$, o $\angle FCA \geqslant \angle DCA$, todėl (pavyzdžiui, remiantis kosinusų teorema) $AF \geqslant AD$. Vadinasi, $\triangle AFD$ kampai $\angle ADF \geqslant \angle AFD$.




Apskaičiuokime tuos kampus. Trikampis $FCD$ lygiašonis, todėl $\angle CFD = \angle CDF = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \beta)$. Kampas $\angle AFC = 180^\circ - \alpha - 2\beta$, todėl $\angle AFD = \angle AFC - \angle CFD = 180^\circ - \alpha - 2\beta - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta$. Panašiai $\angle ADF = \angle ADC - \angle CDF = 180^\circ - 2\alpha - \beta - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$. Bet $\angle ADF \geqslant \angle AFD$, todėl $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \geqslant 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta \Rightarrow \beta \geqslant \alpha$. Kadangi turėjome ir nelygybę $\alpha \geqslant \beta$, tai $\alpha = \beta$, ir $\triangle ABC$ lygiašonis.

*II būdas.* Sugalvoti geometrinį būdą labai sunku, bet nelengvas ir formulių kelias. Remkimės gerai žinoma pusiaukampinės $d_c$, išvestos į kraštinę $c$, išraiška trikampio kraštinėmis $a, b, c$: $d_c^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}$ (ją įrodysime pastaboje). Sakykime, jog $d_a = d_b$. Tada lygybių $d_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$ ir $d_b^2 = ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2}$ kairiosios pusės lygios, todėl $bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2}$.
Pertvarkome:
$b - \frac{a^2b}{(b+c)^2} = a - \frac{ab^2}{(a+c)^2}$, $(a-b)(b+c)^2(a+c)^2 + ab\big(a(a+c)^2 - b(b+c)^2\big) = 0$.
Pertvarkome antrą dėmenį:
$ab(a^3 - b^3 + 2a^2c - 2b^2c + ac^2 - bc^2) = ab\big((a-b)(a^2 + ab + b^2) + 2c(a^2 - b^2) + c^2(a-b)\big) = ab(a-b)(a^2 + ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2)$.
Turime lygybę:
$(a-b)\big[(b+c)^2(a+c)^2 + ab(a^2 + b^2 + c^2 + ab + 2ac + 2bc)\big] = 0$.
Kadangi reiškinys laužtiniuose skliaustuose teigiamas, tai $a = b$.
*Pastaba.* Pusiaukampinės formulę nesunku išvesti remiantis pusiaukampinės savybe ir kosinusų teorema (žr., pavyzdžiui, A. Grincevičiaus ir J. Mačio knygą „Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai“, 514 uždavinį 196 psl.). Patogus atsiminti kitas — plotų būdas.




$S_{\triangle ACD} + S_{\triangle DCB} = S_{\triangle ABC}$,
$\frac{1}{2}bd\sin\frac{C}{2} + \frac{1}{2}ad\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}ab\sin C$,
$bd\sin\frac{C}{2} + ad\sin\frac{C}{2} = 2ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$,
$d(a+b) = 2ab\cos\frac{C}{2}$,
$d^2(a+b)^2 = 4a^2b^2\cos^2\frac{C}{2}$.
Dešinioji pusė lygi $2a^2b^2(1 + \cos C) = 2a^2b^2\big(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\big) = ab(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = ab(a+b)^2 - abc^2$, todėl $d^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}$.

**45.** a) $\angle MNO = 180^\circ - \angle 1$, $\angle PRO = 180^\circ - \angle 2$. Kadangi $\angle 1 = \angle 2$, tai $\angle MNO = \angle PRO$.
Kadangi $ON = OR$ (duota), $\angle MNO = \angle PRO$ (įrodėme), $\angle MON = \angle POR$ (kryžminiai), tai $\triangle MON = \triangle POR$ ir $MN = PR$.

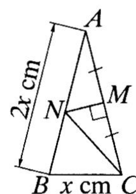
b) Kadangi $\triangle MON = \triangle POR$, tai $OP = OM$.
$\triangle MOP$ yra lygiašonis, todėl $\angle OMP = \angle OPM = \frac{180^\circ - \angle POM}{2}$.
$\triangle NOR$ yra lygiašonis, todėl $\angle ONR = \angle ORN = \frac{180^\circ - \angle RON}{2}$.
Kadangi $\angle POM = \angle RON$ (kryžminiai), tai
$\angle OMP = \angle OPM = \angle ONR = \angle ORN$.
$\angle OPM$ ir $\angle ONR$ yra vidaus priešiniai kampai prie tiesių $NR$ ir $MP$ bei kirstinės $PN$. Kadangi šie kampai lygūs, tai $NR \parallel MP$.

**46.** Kadangi $\triangle ABC = \triangle DEF$, tai $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle C = \angle F$. Kadangi $\angle GBC = \angle ABC - \angle ABG$, $\angle HEF = \angle DEF - \angle DEH$, tai $\angle GBC = \angle HEF$. Vadinasi, $\triangle GBC = \triangle HEF$ pagal kraštinę ir du kampus prie jos. Tada $GC = HF$.

**47.** Kadangi $AC = AA_1 + A_1C$, $A_1C_1 = CC_1 + A_1C$ ir $AA_1 = CC_1$, tai $AC = A_1C_1$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — pagal tris kraštines. Vadinasi, $\angle BAC = \angle B_1C_1A_1$. Tada $\angle 1 = 180^\circ - \angle BAC$, $\angle 2 = 180^\circ - \angle B_1C_1A_1$. Vadinasi, $\angle 1 = \angle 2$.

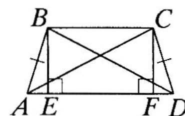
**48.** a) $\triangle O_1AO_2 = \triangle O_1BO_2$, nes $AO_1 = BO_1$ (spinduliai apskritimo, kurio centras $O_1$), $AO_2 = BO_2$ (spinduliai apskritimo, kurio centras $O_2$), $O_1O_2$ — bendra. Tada $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$.

b) Keturkampis $O_1AO_2B$ yra deltoidas, o jo įstrižainės susikerta statmenai.




**49.** Sakykime, kad $BC = x$ cm. $P_{\triangle BCN} = BC + CN + NB$. Kadangi $AN = CN$ (iš stačiųjų trikampių $AMN$ ir $CMN$ lygumo pagal du statinius), tai $P_{\triangle BCN} = BC + AN + NB = BC + AB = x + 2x = 3x$. Kadangi $P_{\triangle BCN} = 18$ cm, tai $3x = 18$ ir $x = 6$ cm. Tada $P_{\triangle ABC} = 2x + 2x + x = 5x = 5 \cdot 6 = 30$ (cm).

*Atsakymas.* 30 cm.




**50.** Nuleiskime statmenis $BE$ ir $CF$. Kadangi $BE = CF$, tai $\triangle BEA = \triangle CFD$ pagal statinį ir įžambinę. Todėl $\angle BAE = \angle CDF$. Kadangi $AB = CD$, $AD$ — bendra, $\angle BAD = \angle CDA$, tai $\triangle ABD = \triangle DCA$. Vadinasi, $BD = AC$.

*Pastaba.* Nors apskritai ateityje to ir nedarome, bet vieną kartą reikia įrodyti, kad lygiašonės trapecijos tiek kampai prie pagrindo, tiek įstrižainės lygios.

**51.** Trys kampai po 37° ir keturi — po 143°.

**52.** Pažymėkime smailųjį kampą $x$. Tada bukasis kampas yra $x + 50°$. Gauname: $x + x + 50° = 180°$ ir $x = 65°$; $x + 50° = 65° + 50° = 115°$.

Taigi turėsime keturis kampus po 65° ir keturis — po 115°.

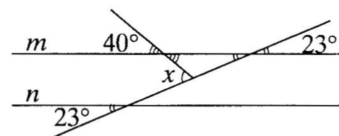
**53.** Sprendžiame sistemą: $\begin{cases} \angle 4 + \angle 1 = 180°, \\ \angle 4 - \angle 1 = 36°; \end{cases}$ $\angle 4 = 108°$, $\angle 1 = 72°$.

Sprendžiame kitą sistemą: $\begin{cases} \frac{\angle 3}{\angle 2} = \frac{3}{2}, \\ \angle 3 + \angle 2 = 180°. \end{cases}$

Iš pirmos lygties turime, kad $\angle 3 = \frac{3\angle 2}{2}$; $\frac{3\angle 2}{2} + \angle 2 = 180°$ ir $\angle 2 = 72°$.

Kadangi $\angle 1 = \angle 2$, o tai yra išorės priešiniai kampai, tai $a \parallel b$.

**54.** Papildykime sąlygoje duotą brėžinį (brėžinyje lygūs kampai pažymėti vienodais lankeliais). Pagal priekampio savybę $\angle x = 23° + 40° = 63°$.




**55.** Dviejų vidaus vienašalių kampų suma lygi 180°. Tų kampų pusių suma lygi 90°, o trečiajam trikampio (sudaryto kirstinės ir pusiaukampinių) kampui lieka 180° − 90° = 90°. Vadinasi, pusiaukampinės susikerta stačiu kampu.

**56.** Sprendžiame lygtį: $3x - 50° + 80° = 180°$ (gretutinių kampų suma), $x = 50°$. Tada $2x + 10° = 2 \cdot 50° + 10° = 110°$ ir $3x - 50° = 3 \cdot 50° - 50° = 100°$. Kadangi $110° \neq 100°$, vadinasi, tiesės $k$ ir $l$ nėra lygiagrečios.

**57.** Pažymėkime moksleivių skaičių $n$, o merginų — $x$. Tuomet pagal sąlygą

$$\begin{cases} x = (\frac{n}{3} - 3) \cdot 2, \\ n - x = (\frac{n}{3} - 2) \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2n - 18, \\ 3n - 3x = 2n - 12 \end{cases} \Rightarrow n = 30, \ x = 14.$$

*Atsakymas.* 14.

**58.** Tegu $x$ — I-ojo darbininko, o $y$ — II-ojo darbininko per valandą pagamintų detalių skaičiai. Tada $\begin{cases} 7x - 8 = 7y, \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow 7x = 28, \ 7y = 20.$

*Atsakymas.* 28, 20.

**59.** Sakykime, kad $n = \overline{xy}$. Tada $\begin{cases} 10x + y = xy + 16, \\ 10x + y = (x - y)^2 + xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + y = xy + 16, \\ y = x + 4 \end{cases}$

arba $\begin{cases} 10x + y = xy + 16, \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow x = 3, \ y = 7; \ x = 4, \ y = 8.$

*Atsakymas.* 37, 48.

**60.** Jeigu $x$ — berniukų skaičius, tai $\frac{(x+2)(x+1)}{2} = 8 + xk$, $x^2 + (3-2k)x = 14$. Kadangi mergaitės iš berniukų „atėmė“ 7 taškus, tai berniukų buvo ne mažiau kaip 4. Iš lygties matome, kad 14 dalijasi iš $x$, todėl $x$ gali būti tik 7 (tada $7^2+(3-2k)\cdot 7 = 14$, $7+3-2k = 2$, $k = 4$) arba 14 (tada $14^2+(3-2k)\cdot 14 = 14$, $14 + 3 - 2k = 1$, $k = 8$).
*Atsakymas.* 7, 14.

**61.** Lygtis $(1 + k)x^2 - 3kx + 4k = 0$ turės du sprendinius, kai $k \neq -1$ ir $D = 9k^2 - 16k(1 + k) = -7k^2 - 16k > 0 \Rightarrow$ 1) $-\frac{16}{7} < k < -1$ arba 2) $-1 < k < 0$. Randame duotosios lygties sprendinius: $x_1 = \frac{3k-\sqrt{D}}{2(k+1)}$ ir $x_2 = \frac{3k+\sqrt{D}}{2(k+1)}$.
1) atveju $k + 1 < 0$, todėl mažesnis sprendinys $x_2$, 2) atveju $k + 1 > 0$, todėl mažesnis $x_1$. Užtenka reikalauti, kad mažesnis sprendinys būtų didesnis už 1, taigi sprendžiame lygčių sistemas:

$$\begin{cases} \frac{3k+\sqrt{-7k^2-16k}}{2(k+1)} > 1, \\ -\frac{16}{7} < k < -1 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} \frac{3k-\sqrt{-7k^2-16k}}{2(k+1)} > 1, \\ -1 < k < 0. \end{cases}$$

Gauname:

$$\begin{cases} \sqrt{-7k^2 - 16k} < 2 - k \\ -\frac{16}{7} < k < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < -1 \text{ arba } k > -\frac{1}{2}, \\ -\frac{16}{7} < k < -1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{16}{7} < k < -1;$$

$$\begin{cases} \sqrt{-7k^2 - 16k} < k - 2, \\ -1 < k < 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$ (nes pirma nelygybė su neigiamais $k$ visada neteisinga).

*Atsakymas.* $\left(-2\frac{2}{7}; -1\right)$.

**62.** Jeigu $x_1$ ir $x_2$ — kvadratinės lygties $x^2 + mx + n = 0$ sprendiniai, tai $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = -m(m^2 - 3n)$. Mūsų atveju $m = -4$, $n = p$, todėl $4(16 - 3p) = 16$, $p = 4$. Gautąją reikšmę būtinai reikia tikrinti (gal, pavyzdžiui, diskriminantas neigiamas, ir lygtis iš viso neturi sprendinių). Turime lygtį $x^2 - 4x + 4 = 0$. Jei sakysime, kad ji turi du vienodus sprendinius $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, tai iš tikrųjų kubų suma lygi 16. Bet jei laikysime, kad sprendinių kubų suma, kai sprendinys $x_1$ vienintelis, yra to sprendinio kubas $x_1^3$, tai pateiktas sprendimas nebetinka. Spręsti reikia taip.
Jeigu sprendiniai skirtingi, tai kaip ir aukščiau randame $p = 4$, bet ši reikšmė netinka — duoda vieną sprendinį. Jeigu sprendinys $x_1$ vienintelis, tai $D = 16 - 4p = 0$, vėl $p = 4$, $x_1 = 2$. Tikriname, ar $x_1^3 = 16$, — pasirodo, ne.
*Atsakymas.* Jei sąlygą suprantame taip, kad turi būti du sprendiniai (o taip ir reikia ją suprasti), tai reikiamų $p$ reikšmių nėra. Jei sąlygą suprastume taip, kad gali būti ir du „lygūs“ sprendiniai $x_1$, o kubų suma yra $x_1^3 + x_1^3 = 2x_1^3$, tai tiktų $p = 4$. Pagaliau jeigu sąlygą suprastume taip, kad vieno sprendinio $x_1$ atveju kubų „suma“ yra $x_1^3$, tai reikiamų $p$ reikšmių nėra.
*Pastaba.* Uždavinio sprendimas dar kartą primena, kad jeigu uždavinys „žodinis“, tai reikia tikrinti kiekvieną žodį (o ne tik „skaičiavimus“). Beje, Vijeto teoremą lygčiai $ax^2 + bx + c = 0$ išreiškia ne du sąryšiai $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, o keturi sąryšiai: $a \neq 0$, $D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Todėl neatsižvelgus į sąlygas $a \neq 0$, $D \geqslant 0$ dažnai apsirinkama.

**63.** $\sqrt{(x-6)x+9} = |x-3| + |x-5| < 4 \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ -x + 3 - x + 5 < 4, \end{cases}$

arba $\begin{cases} 3 < x \leqslant 5, \\ x - 3 - x + 5 < 4, \end{cases}$ arba $\begin{cases} x > 5, \\ x - 3 + x - 5 < 4. \end{cases}$

Iš pirmosios sistemos: $2 < x \leqslant 3$; iš antrosios: $3 < x \leqslant 5$; iš trečiosios: $5 < x \leqslant 6$.
Žinoma, žymiai trumpesnis „geometrinis“ sprendimas.
*Atsakymas.* (2; 6).

**64.** Tegu $x$ — dviratininko, $y$ — motociklininko kelionėje užtruktas laikas valandomis. Tuomet $\begin{cases} x - y = 2, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 1.$
*Atsakymas.* Per 1 valandą.

**65.** Jei vagono rato ilgis $l$ m, tai $2100l = (l+3{,}2)\cdot 900 \Rightarrow l = 2{,}4$. Tada traukinio nuvažiuotas kelias $s = 2{,}4 \cdot 2100 = 5040\,\text{m} = 5{,}04\,\text{km}$.

**66.** Panaikinę iracionalumą vardikliuose, gauname lygtį:
$\sqrt{2(x-1)} - \sqrt{x+6} = 1 \Rightarrow x - 9 = 2\sqrt{x+6} \Rightarrow x^2 - 22x + 57 = 0 \Rightarrow x = 19$.

**67.** Lygties apibrėžimo sritis: $\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0, \\ 2x-5 \geqslant 0, \\ 5-2x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}$. Šis vienintelis taškas tenkina ir nelygybę.
*Atsakymas.* 2,5.

**68.** *Nurodymas.* Padauginkite abi nelygybės puses iš 2 ir nelygybę perrašykite taip: $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 \geqslant 0$.

**69.** Įrodymui patogu skaičių tiesę suskaidyti į tris intervalus: $(-\infty; 0]$, $(0; 1)$ ir $[1; +\infty]$.
Kai $x \in (-\infty; 0]$, tai nelygybė teisinga, nes kairėje pusėje — teigiamo ir neneigiamų narių suma;
kai $x \in (0; 1)$, nelygybę pertvarkome: $x^8 + x^2(1-x^3) + x(x-1) + 1 > 0$ — taip pat teigiamo ir neneigiamų skaičių suma;
kai $x \in [1; +\infty)$, tai $x^5(x^3-1) + x(x-1) + 1 > 0$.

**70.** Sveikaisiais lygties sprendiniais vadiname sprendinius $(m; n)$, kuriuose ir $m$, ir $n$ — sveikieji skaičiai. Kadangi $x = 10$ lygčiai netinka, $x \neq 10$, išreiškiame $y$: $y = \frac{10x}{x-10} = \frac{10x-100+100}{x-10} = 10 + \frac{100}{x-10}$. Kad $y$ būtų sveikasis skaičius, 100 turi dalytis iš $x - 10$. Kadangi $100 = 2^2 \cdot 5^2$, tai visi jo dalikliai yra $-100$, $-50$, $-25$, $-20$, $-10$, $-5$, $-4$, $-2$, $-1$, 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Jų yra 18. Bet kadangi $y \neq 0$, tai daliklis $-10$ atkrenta. Vadinasi, $x - 10$ įgyja 17 reikšmių, ir tiek pat turime sprendinių.

**71.** Tegu $x$ — I-ojo, o $y$ — II-ojo lydinio reikalingi kiekiai.
Tuomet $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2y}{5} = 7, \\ \frac{2x}{3} + \frac{3y}{5} = 12 \end{cases} \Rightarrow x = 9,\ y = 10.$

**72.** a) $(10; 7)$, $(-7; -10)$. *Sprendimas.* Pažymėję $x - y = u$, $xy = v$, sistemą perrašykime taip: $\begin{cases} (u^2+2v)u = 447, \\ uv = 210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + 2uv = 447, \\ uv = 210 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} u^3 = 27, \\ uv = 210 \end{cases} \Rightarrow u = 3,\ v = 70 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 70 \end{cases} \Rightarrow x = 10,\ y = 7$
arba $x = -7$, $y = -10$;
*Pastaba.* Naujų kintamųjų galima ir neįsivesti — žr. punktą b).
b) $(3; 2)$, $(-2; -3)$. *Sprendimas.* $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2) = 19, \\ xy(x-y) = 6 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} \frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} = \frac{19}{6}, \\ xy(x-y) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = t,\ 6t^2 - 13t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$ arba $t = \frac{2}{3}$;
$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ y^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 2$ arba $\begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y^3 = -27 \end{cases} \Rightarrow x = -2,\ y = -3.$
Naujo kintamojo galima ir neįsivesti:
$\frac{x^2+xy+y^2}{xy} = \frac{19}{6} \Rightarrow 6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0 \Rightarrow (2x-3y)(3x-2y) = 0 \Rightarrow$
$x = \frac{3}{2}y$ arba $x = \frac{2}{3}y$.
Trumpiausias būtų punkto a) būdas:
$\begin{cases} (x-y)(x^2-2xy+y^2) + 3xy(x-y) = 19, \\ xy(x-y) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^3 = 1, \\ xy(x-y) = 6 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = 2$ arba $x = -2,\ y = -3$.

# II. PLOKŠTUMOS VEKTORIAI

## 6. VEKTORIAI IR JŲ VEIKSMAI

Galbūt moksleiviai jau susidūrė su vektoriais fizikos pamokose. Juo geriau. Tada kils mažiau klausimų, kam jie reikalingi, kur jie taikomi.

Galima apskritai šiek tiek aptarti, kaip ir kodėl matematikoje atsiranda naujos sąvokos ir objektai.

Matematika yra tarsi kalba, kuria galima išreikšti įvairių reiškinių dėsningumus. Pradedant tyrinėti naujus reiškinius, prisireikia ir naujų sąvokų, tarsi naujų žodžių. Jeigu pavyzdžiui, mums rūpi tik nuvažiuotas kelias, tai jam reikšti užtenka skaičių. Jeigu parūpsta ir kryptis, reikia pagalvoti, kaip ją nusakyti. Žinoma, ją kartais galima nusakyti ir žodžiais. Tačiau užuot pasakius ilgą ir painų sakinį, verčiau žemėlapyje nubrėžti kryptį nurodančią rodyklę. Taigi vektoriai — atkarpos su nurodytomis kryptimis — yra puikus būdas vaizduoti tuos dydžius, kuriems apibrėžti nepakanka užrašyti skaitinę reikšmę, bet reikia nurodyti ir kryptį.

Taigi gal vektoriai yra tik fizikos sąvoka? Anaiptol. Lygiai taip pat kaip skaičiai, kurie gali reikšti ir masę, ir plotą, ir pelną, vektoriais irgi galima daug ką reikšti. Tačiau skaičiai yra matematikos sąvoka, nes čia nagrinėjamos jų pačių savybės, nesirūpinant, kur jie gali būti pritaikyti. Tas pats pasakytina ir apie vektorius.

### 6.1. Vektoriaus sąvoka

Vektorius — atkarpa su nurodyta kryptimi. Kas gali būti paprasčiau? Išvardykime tai, ką „turi" vektorius: pradžios ir galo taškus, ilgį. Pasakę, kuris taškas yra pradžios, kuris galo, nurodome ir vektoriaus kryptį.

Tačiau iš karto kyla problema: jeigu pradžios ir galo taškai sutampa, kokia tada vektoriaus kryptis? Gal neverta tokios į tašką pavirtusios atkarpos laikyti vektoriumi? Tačiau, jeigu jau turime skaičių nulį „kiekiui, kurio nėra" žymėti, kodėl neįvesti vektoriaus, kuris neturi krypties?

Taigi apibrėžiame nulinį vektorių, jo ilgis lygus nuliui, o kryptis neapibrėžta.

Sukūrus „vektorių pasaulį", galima apibrėžti jų tarpusavio „giminystės" sąryšius. Kiekvienam vektoriui (išskyrus nulinius) galima nurodyti tik vieną tiesę, kurioje tas vektorius yra. Jei du vektoriai yra lygiagrečiose tiesėse (arba toje pačioje tiesėje), jie yra kolinearūs, jeigu ne — nekolinearūs.

Galbūt gali kelti abejonių vektorių lygybės apibrėžimas. Kodėl vektorius, kurie turi skirtingus pradžios ir galo taškus turime laikyti lygiais? Viena vertus, galima prisiminti, kad vienodo ilgio atkarpos laikomos lygiomis, nors jos ir nesutampa. Kita vertus, galima pasitelkti pavyzdį: įsivaizduokime du automobilius vienodai greitai važiuojančius tiesia autostrada ta pačia kryptimi...

***Žinome:***

vektoriaus sąvoką;
vektorių kolinearumo sąvoka;
vektorių lygybės sąvoką.

***Mokame:***

atpažinti kolinearius (vienakrypčius, priešpriešius) vektorius;
atpažinti lygius vektorius;
atidėti duotą vektorių iš nurodyto taško.

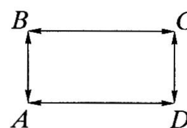
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Visi skyrelio uždaviniai skirti vektoriaus sąvokai įtvirtinti. Juos sprendžiant tenka skaičiuoti vektorių ilgius, įžvelgti kolinearius, lygius vektorius, atidėti vektorių iš nurodyto taško ir pan. Verta panagrinėti 3 uždavinį, galbūt, pasiūlant moksleiviams atlikti po vieną dalį, o po to kartu aptariant jų atsakymus. Reikėtų atlikti 6, 10 ir 13 uždavinių užduotis. Šie paprasti uždaviniai pratina įžvelgti vektorius geometriniuose brėžiniuose, naudotis vektorių kolinearumo, lygumo sąvokomis.

**1.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$.

**2.** $|\overrightarrow{CA}| = 3\,\text{cm}$, $|\overrightarrow{CB}| = 4\,\text{cm}$, $|\overrightarrow{AB}| = 5\,\text{cm}$.

**3.** a) Jeigu du vektoriai yra kolinearūs, tai ir lygūs;
b) jeigu du vektoriai yra lygūs, tai ir vienakrypčiai;
c) jeigu du vektoriai yra priešpriešiai, tai ir lygūs;
d) jeigu du vektoriai yra kolinearūs, tai vienas iš jų — nulinis;
e) jeigu du vektoriai yra vienakrypčiai, tai vienas iš jų — nulinis.
Iš duotųjų teiginių teisingi yra a) ir d), o iš suformuluotų atvirkštinių — tik b).




**4.** a) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$ ir $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$ ir $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{DA}$;
b) ir d) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$ ir $\overrightarrow{DA}$;
c) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$ ir $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{DA}$.

**5.** $|\overrightarrow{AD}| = BC = 18\,\text{cm}$, $|\overrightarrow{DC}| = AB = 9\,\text{cm}$, $|\overrightarrow{CE}| = 18 : 3 = 6\,(\text{cm})$, $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\,(\text{cm})$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9^2 + 18^2} = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}\,(\text{cm})$, $|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}\,(\text{cm})$.

**6.** a) ir c) — galima atidėti vieną vektorių;
b) ir d) — galima atidėti be galo daug vektorių.

**7.** Vienakrypčiai vektoriai: $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{KN}$;
priešpriešiai vektoriai: $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{KM}$.

**8.** Kaip ir 1 pratime, gauname vektorius: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$. Tačiau šiuo atveju galimi ir nuliniai vektoriai: $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ ir $\overrightarrow{CC}$.
*Atsakymas.* 9.

**9.** Remiantis trikampio nelygybe, kai taškai $A$, $B$ ir $C$ nėra vienoje tiesėje, turime: $|\overrightarrow{AC}| < |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$.
Duotoji lygybė galioja, kai taškai yra vienoje tiesėje.

**10.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$.

**11.** Pavyzdžiui: a) $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{BE}$ ir $\overrightarrow{CF}$; c) $\overrightarrow{AE}$ ir $\overrightarrow{DF}$; d) $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{EF}$.

**12.** $|\overrightarrow{MN}| = \frac{|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{12+20,4}{2} = 16,2\,(\text{cm})$,
$|\overrightarrow{FD}| = \frac{|\overrightarrow{AD}|-|\overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{20,4-12}{2} = 4,2\,(\text{cm})$,
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{4,2^2 + 5,6^2} = 7\,(\text{cm})$.

**13.** Galimi du atvejai: taškai $M$, $K$, $N$, $L$ yra keturkampio viršūnės arba yra vienoje tiesėje. Abiem atvejais:
a) $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NL}$; b) $\overrightarrow{MK} \uparrow\downarrow \overrightarrow{LN}$ ir $|\overrightarrow{MK}| = |\overrightarrow{LN}|$.

**14.** a) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{B_1C_1}$;
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{DC}$ ir $\overrightarrow{D_1C_1}$;
$\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ ir $\overrightarrow{DD_1}$;
b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$;
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D_1C_1}$;
$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1}$.

## 6.2. Vektorių sudėtis

Tikriausiai šiame skyrelyje prie vektorių sudėties apibrėžimo pereinama kiek per greitai. Iš tikrųjų, iki šiol buvo sudedami tik skaičiai. Dabar gi sakoma, kad „mokysimės sudėti du vektorius". Kodėl reikia sudėti vektorius?

Tokios operacijos reikalingumą galima motyvuoti pasitelkus kūnų judėjimo pavyzdžius. Dažnai kūno judėjimą galima tarsi išskaidyti į kelias dalis. Pavyzdžiui, skersai upę plaukiančią motorinę valtį srovė neša lygiagrečiai krantams. Jeigu upė netekėtų, tai valties greitis (vektorius) būtų nukreiptas statmenai krantui, o jo ilgis būtų lygus valties greičiui stovinčiame vandenyje. Jeigu upė tekėtų, bet motoras būtų išjungtas, tai valties greitis būtų toks pat kaip upės tėkmės greitis. Tačiau jeigu motoras veikia ir upė teka, tai tikrasis valties greitis susideda iš abiejų komponenčių.

Kitaip vektorių sudėties reikalingumą galime motyvuoti priminę, kad kūnus veikiančios jėgos irgi reiškiamos vektoriais. Jeigu dvi jėgos veikia kūną skirtingomis kryptimis, tai reikia išmokti surasti jų atstojamąją.

Vektorių sudėtį pagal daugiakampio taisyklę nesudėtinga paaiškinti. Iš karto galima pabrėžti, kokia naudinga nulinio vektoriaus sąvoka. Iš tikrųjų, jeigu vektorius, kurio pradžios ir galo taškai sutampa, nebūtų pripažintas vektoriumi, dabar tektų sakyti, kad vektorių suma

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$

yra neapibrėžta.

Paaiškinus, kaip du vektorius galima sudėti pagal lygiagretainio taisyklę, galima parodyti, kaip duotąjį vektorių galima išskaidyti į kitų dviejų vektorių sumą, kai iš anksto nurodyta, kokioms tiesėms šie vektoriai turi būti lygiagretūs. Reikia nusibraižyti atitinkamą lygiagretainį taip, kad duotasis vektorius būtų šio lygiagretainio įstrižainėje.

Baigiant aiškinti vektorių sudėties sąvoką, verta dar kartą pabrėžti skaičių ir vektorių sudėties panašumą: vektorių šeimoje yra vektorius, savo savybėmis panašus į skaičių 0, vektorių sudėtis paklūsta tiems patiems dėsniams, kaip ir skaičių. Kokie dar šių skirtingos prigimties objektų panašumai išryškės?

Skyrelis baigiasi dviem pavyzdžiais, kuriuose vektoriai taikomi kūnų judėjimams nagrinėti. Antrajame pavyzdyje kūną (valtį) verčia judėti net trys veiksniai: irklai ar motoras, upės tėkmė ir vėjas. Mums gi rūpi, kiek valtis pasislenka dviem kryptimis: statmenai ir išilgai krantui. Todėl surastąjį greitį $x$ skaidome į dvi tarpusavyje stamenas komponentes: viena jų lemia poslinkį viena kryptimi, kita — antra. Tai svarbi ir anaiptol ne akivaizdi idėja, kartu parodanti vektorių sudėties sąvokos naudą ir ryšį su realiais reiškiniais.

***Žinome ir suvokiame:***

vektorių sudėties apibrėžimą;
vektorių ir skaičių analogiją;
vektorių sudėties dėsnius.

***Mokame:***

sudėti vektorius pagal daugiakampio taisyklę;
sudėti vektorius pagal lygiagretainio taisyklę;
išskaidyti vektorių į dviejų nurodytoms tiesėms lygiagrečių vektorių sumą;
taikyti vektorius judėjimo uždaviniams spręsti.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Uždaviniai 15–19, skirti „pasimankštinti" sudedant vektorius, neturėtų pareikalauti daug laiko. Po jų reikėtų pasiūlyti išspręsti 20 arba 21 uždavinį (o gal ir abu). Jie moko sudaryti išraiškas, siejančias duotuosius vektorius. Sprendžiant 23 uždavinį (b) dalį) bei 25 uždavinį, tenka šį tą pastebėti. Galbūt geriausia pasiūlyti 25 uždavinį panagrinėti namuose. Verta išspręsti ir 26 uždavinį, kuriame vektorius reikia taikyti nagrinėjant judėjimą.

**15.** a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{BC}$; d) $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

**17.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$. Kadangi $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{BD}$, tai duotoji lygybė neteisinga.

**18.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\overrightarrow{AF}$.

**19.** a) Kadangi $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, tai $\vec{x}=\overrightarrow{BC}$;
b) kadangi $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$, tai $\vec{y}=\overrightarrow{CA}$.

**20.** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, bet $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$, tai $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$.

**21.** a) $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$;
b) $\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$;
c) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

**22.** Reikia atidėti $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BC}$.

**23.** a) $\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{NM}$;

b) $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LN}+\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{NL}=(\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM})+(\overrightarrow{LN}+\overrightarrow{NL})=\overrightarrow{KM}+\vec{0}=\overrightarrow{KM}$.

**24.** $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}$.

**25.** a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$;

b) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$;

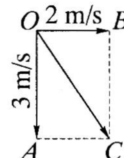
c) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$;

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

$|-\overrightarrow{OC}|=|-\overrightarrow{OA}|=|-\overrightarrow{OB}|=1$, $|\vec{0}|=0$.

*Pastaba.* Sudėdami du brėžinyje pavaizduotus vektorius pagal lygiagretainio taisyklę, braižytume rombą, kurio bukieji kampai lygūs 120°. Šių kampų viršūnes jungianti įstrižainė dalija rombą į du lygius lygiakraščius trikampius. Remiantis šiomis pastabomis nesunku nurodyti teisingus atsakymus.

**26.** Parašiutininko leidimosi greičio vektorius $\overrightarrow{OC}$; $|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.




**27.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$. Vadinasi, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

## 6.3. Vektorių atimtis

Vektorių atimtis nėra toks svarbus veiksmas, kaip sudėtis. Tiksliau tariant — atimtis tėra atskiras sudėties atvejis. Atskiras skyrelis skirtas atimčiai — veikiau duoklė tradicijai, nei būtinybė.

Tačiau priešingojo vektoriaus sąvoka yra svarbi. Ji dar labiau paryškina skaičių ir vektorių sudėties analogiją. Remiantis priešingais vektoriais įsitikinama, kad ir vektorines lygybes galima pertvarkinėti panašiai kaip ir skaitines: dėmenį iš vienos lygybės pusės galima perkelti į kitą, pakeitus prieš jį parašytą ženklą.

***Žinome:***

priešingojo vektoriaus sąvoką;
vektorių atimties apibrėžimą.

***Mokame:***

atimti vektorius, kai jie atidėti iš to paties pradžios taško;
vektorių atimtį pakeisti sudėtimi.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Atimti vieną vektorių iš kito, įžvelgti vektorių skirtumą moko 29–31 pratimai. Juos reikėtų atlikti. Po to reikėtų pasirinkti ir atlikti pratimus, kuriuose reikalaujama vienus vektorius išreikšti kitais (32–34, 38–41). Tiems, kas gerai suprato atimties veiksmą, galima pasiūlyti įrodymo uždavinius (37, 39, 40) arba vektorinių reiškinių prastinimo užduotis (42). Šis pratimas gerai tinka namų užduočiai.

**28.** Galima sudaryti 12 nenulinių vektorių su pradžios ir galo taškais lygiagretainio viršūnėse: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.
Be to galima sudaryti keturis nulinius vektorius: $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, $\overrightarrow{DD}$.
Priešingų vektorių poros: $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CA}$.

**31.** Lygybė $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|$ teisinga, kai $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$.

**32.** a) $\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$;
b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = -\vec{b} - (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{b}$;
c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b}$.

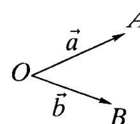
**33.** $\overrightarrow{BD} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = -2\vec{b} - (-\vec{a}) = \vec{a} - 2\vec{b}$.

**34.** $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

**35.** a) Kadangi $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$, tai duotoji lygybė neteisinga;
b) kadangi $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$, tai duotoji lygybė teisinga;
c) kadangi $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, tai duotoji lygybė teisinga.

**36.** a) $|\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{CB}| = a$; b) $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

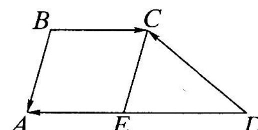
**37.** Atidėkime vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nuo vieno taško $O$. Tegul $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
Tada $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.
Kai taškai $O$, $A$ ir $B$ nėra vienoje tiesėje arba $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, galioja nelygybė:
$|\vec{a} - \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.
Kai $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, galioja lygybė.




**38.** $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} - \vec{e} + \vec{f}$.

**39.** Jei vektoriai $\overrightarrow{EF}$ ir $\overrightarrow{HG}$ nėra vienoje tiesėje, tai gauname keturkampį $EFGH$, kuris yra lygiagretainis (dvi priešingos kraštinės yra lygios ir lygiagrečios). Lygiagretainio kitos dvi priešingos kraštinės taip pat yra lygios ir lygiagrečios, todėl galioja lygybė $\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{GF}$.
Ši lygybė galioja ir kai vektoriai $\overrightarrow{EF}$ ir $\overrightarrow{HG}$ yra vienoje tiesėje.

**40.** Per tašką $C$ brėžiame tiesę, lygiagrečią kraštinei $AB$, iki susikirtimo su pagrindu $AD$ taške $E$. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA}) + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE}$;
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DE}$.




**41.** $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EF}$.

**42.** a) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{LK} - \overrightarrow{ML} = (\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{ML}) - \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{KN}$;

b) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}) - (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{GF}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GF} =$ $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF}) - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GD}$;

c) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{KZ} - (\overrightarrow{ZX} - \overrightarrow{YK}) = (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YK} + \overrightarrow{KZ}) - \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{XZ} - \overrightarrow{ZX} =$ $\overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{XZ} = 2\overrightarrow{XZ}$;

d) $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{PO} = (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SR}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} =$ $\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = \vec{0}$ (arba: $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PO} = \vec{0}$).

## 6.4. Vektorių daugyba iš skaičių

Tai labai svarbus veiksmas. Jis glaudžiai susieja vektorius (geometrinius objektus) su skaičiais. Tiesa, jau ir anksčiau nurodėme vektorių ir skaičių ryšį — vektoriaus ilgis reiškiamas neneigiamu skaičiumi. Tačiau tas ryšys niekur nebuvo iš esmės panaudotas.

Prie skaičiaus ir vektoriaus sandaugos apibrėžimo „artėjame" nuo vektoriaus „kartotinių", t. y. nuo vektorių $n\vec{a}$, čia $n$ — natūralusis skaičius. Galima prieš paaiškinant bendrąjį apibrėžimą pabraižyti ir vektorius $n\vec{a}$ su neigiamais sveikaisiais $n$.

Svarbu pabrėžti, kad priešingąjį vektorių galima interpretuoti kaip duotojo vektoriaus ir skaičiaus $-1$ sandaugą.

Skyrelio tekste pateikiama vektorių daugybos iš skaičių savybės ir šiek tiek jas pagrindžiančių samprotavimų. Jeigu trūksta laiko, galima apsiriboti pabrėžiant, kad vektoriniai reiškiniai, sudaryti panaudojant vektorių sudėtį, atimtį ir daugybą iš skaičių, pertvarkomi panašiai kaip algebriniai (atskliaudžiama, taikomos ženklų taisyklės, sudedami panašūs nariai).

Pabrėžkime, kad padauginus vektorių iš skaičiaus, visada gaunamas vektorius, kolinearus pirmajam. Antroji užduotis, kurioje prašoma parinkti skaičius, kad būtų teisingos nurodytos vektorinės lygybės, parengia išvadą apie kolinearumo ir vektoriaus daugybos iš skaičių ryšį:

*vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq 0$) yra kolinearūs tada ir tik tada, kai yra toks skaičius $m$, kad $\vec{a} = m\vec{b}$.*

Galima užsiminti, kad ši išvada gali būti naudojama tiesių lygiagretumui tirti. Dvi tiesės bus lygiagrečios tada, kai du jose atidėti nenuliniai vektoriai bus kolinearūs. Ar vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs, galima nustatyti tiriant, ar teisinga lygybė $\vec{a} = m\vec{b}$. Tačiau efektyviai pasinaudoti šia idėja galėsime tik apibrėžę vektoriaus koordinates.

Skyrelis baigiasi dviem pavyzdžiais, kurie pirmą kartą parodo vektorių naudą „grynajai" geometrijai.

Tikrai verta panagrinėti 4 pavyzdį — trikampio vidurinės linijos savybės įrodymą. Aiškiai pabrėžkime, kaip iš vektorinių lygybių daromos išvados apie atkarpų ilgius ir lygiagretumą. Ar ne stebėtina, kad savybei įrodyti neprireikė nei lygiagrečių tiesių savybių, nei kitų planimetrijos teoremų? Rezultatą gavome remdamiesi apibrėžtais vektorių veiksmais ir jų savybėmis.

***Žinome:***

vektoriaus daugybos iš skaičiaus apibrėžimą;

vektoriaus daugybos iš skaičiaus savybes;

kolinearumo ir vektorių daugybos iš skaičių ryšį.

***Mokame:***

atidėti vektorių, lygų duotojo vektoriaus ir skaičiaus sandaugai;

pertvarkyti vektorinius reiškinius;

užrašyti lygybes, siejančias geometriniuose brėžiniuose nurodytus vektorius;

iš vektorinių lygybių daryti išvadas apie atkarpų ilgius ir lygiagretumą.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Daugumos skyrelio uždavinių salygose reikalaujama įžvelgti vektorių sąryšius geometriniuose brėžiniuose. Tai svarbios vektorių taikymo nagrinėjant geometrinius sąryšius plokštumoje pratybos. Atlikus kelias 43–46 pratimų užduotis, reikia pereiti prie vektorių reiškimo kitais vektoriais uždavinių. Jei taupome laiką — pakaks išspręsti keletą paprastesnių (47–50) ir vieną ar kitą sudėtingesnį (54–55).

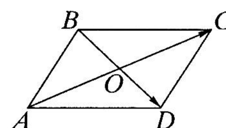
**43.** Vienakrypčiai su vektoriumi $\vec{m}$ yra vektoriai $2\vec{m}$ ir $2{,}5\vec{m}$.
Priešpriešiai su vektoriumi $\vec{m}$ yra vektoriai $-0{,}5\vec{m}$ ir $-1{,}5\vec{m}$.

**46.** a) $k = \frac{1}{2}$; b) $k = -1$; c) $k = \frac{2}{3}$; d) $k = -\frac{1}{2}$; e) $k = \frac{1}{3}$; f) $k = -2$.

**47.** $\overrightarrow{KM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{m}$, $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{n}$, $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$.

**48.** $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$,
$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$,
$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

**49.** Lygiagretainio įstrižainių susikirtimo tašką pažymėkime raide $O$.




a) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

b) Remdamiesi a) punktu, gauname:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

**50.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$,
$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$,
$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$,
$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,
$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

**51.** a) $\vec{x} = \vec{b} - 3\vec{a} + 2\vec{a} - 3\vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}$;
b) $2\vec{x} = 4\vec{a} - 6\vec{b} - \vec{c}$; $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 0{,}5\vec{c}$.

**52.** a) Kadangi $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OK} = \vec{0}$, $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OL} = \vec{0}$, tai duotoji lygybė yra teisinga;
b) kadangi $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OC}$, tai duotoji lygybė neteisinga;
c) kadangi $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OD}$, tai duotoji lygybė neteisinga.

**53.** Sujungę atkarpa taškus $B$ ir $D$, gauname lygiakraštį trikampį $ABD$, kurio kraštinių ilgiai yra $a$. Pagal vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę vektoriaus $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ilgis lygus dvigubai šio lygiakraščio trikampio aukštinei, t. y. $a\sqrt{3}$.

**54.** a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = -2\vec{b} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$;
b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = -2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ (arba: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\big(-2\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b})\big) = \frac{1}{2}(\vec{a} - 3\vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$).

**55.** $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,
$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC_1} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.

**56.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A} + \frac{2}{3}\overrightarrow{B_1B} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \frac{1}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

**57.** $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \frac{1}{2}\big((\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD})\big) = \frac{1}{2}\big((\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\big) = \frac{1}{2}\big((\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \vec{0}\big) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

# 7. VEKTORIAUS KOORDINATĖS

Iki šiol nagrinėdami vektorių veiksmus, ne kartą pabrėžėme jų panašumą su skaičių veiksmais. Pagrindinė idėja, dėstoma šiame skyriuje — skaičiai tam tikra prasme „sutvarko“ vektorių pasaulį; vektorių — geometrinių objektų aibės struktūrą — galima išreikšti naudojant skaičius.

## 7.1. Vektoriai koordinačių plokštumoje

Nuo šiol vektorius nagrinėsime ne šiaip sau plokštumoje, bet plokštumoje, kurioje įvesta koordinačių sistema, t. y. pažymėtas pradžios taškas $O$ ir nubrėžtos tarpusavyje statmenos koordinačių ašys. Šiose ašyse „apgyvendiname“ naujus gyventojus — vienetinius vektorius $\vec{i}$ ir $\vec{j}$. Galima paminėti, kad, pavyzdžiui, dauginant vektorių $\vec{i}$ iš visų skaičių, gaunami visi vektoriai, esantys abscisių ašyje ir turintys pradžios tašką $O$. Analogišką pastabą galima padaryti ir apie ordinačių ašies vektorius.

Galima pasiūlyti pavaizduoti vektorių $\vec{i}+\vec{j}$ arba $2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{i}+(-2)\vec{j}$ ir t. t. O jeigu sudarytume visas įmanomas tokios rūšies sumas? Tikriausiai kas nors suvoks, kad gautume visus plokštumos vektorius, su pradžios tašku $O$, t. y. visų plokštumos taškų vietos vektorius. Taigi vietos vektoriai gaunami iš dviejų vektorių (vienetinių vektorių), remiantis vektoriaus daugybos iš skaičiaus ir vektorių sudėties veiksmais.

Vektoriaus skaidymas suma dviejų vektorių, esančių nurodytų krypčių tiesėse — ne naujiena. Taigi vietos vektoriaus koordinačių radimo būdas nubraižius atitinkamą brėžinį turėtų būti nesunkiai suvokiamas. Galima parodyti, kad kito (nebūtinai vietos) vektoriaus koordinates galima surasti ir neatidėjus šio vektoriaus iš koordinačių pradžios taško.

Kai kuriuose ankstesniuose vadovėliuose vektoriaus koordinatės, skirtingai nuo taško koordinačių, būdavo nurodomos riestiniuose skliausteliuose. Šiame vadovėlyje tiek taškų, tiek vektorių koordinatės rašomos vienodai, norint pabrėžti, kad abiem atvejais jos atlieka tą patį vaidmenį — nusako objektą (tašką ar vektorių).

Skyrelio tekste nutylėta viena pastaba — kad vektorius turi tik vieną koordinačių porą, t. y. vektorius tiesine vienetinių vektorių kombinacija gali būti užrašytas vieninteliu būdu. Daugumai moksleivių tikriausiai nekils abejonių, kad gali būti kitaip. Tačiau galima pasiūlyti ir susimąstyti: ar vektorius gali turėti dvi skirtingas koordinačių poras?

***Žinome:***

kas yra vektoriaus koordinatės;

kaip surasti vektoriaus koordinates.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pasimokius nustatyti nubrėžto vektoriaus koordinates bei braižyti vektorius, kai duotos jų koordinatės (58–60), galima atlikti vieną ar abi 62 uždavinio užduotis. Jos reikalauja išreikšti duotuosius vektorius vienetiniais; a) dalis visai paprasta, b) dalis — sunkesnė, ją galima atlikti ir namuose.

**58.** a) $\overrightarrow{OA}(-4;7)$, $\overrightarrow{OB}(5;0)$, $\overrightarrow{OC}(-7;-3)$, $\overrightarrow{OD}(0;-7)$;
b) $\overrightarrow{EF}(5;3)$, $\overrightarrow{GH}(-3;0)$, $\overrightarrow{MN}(-4;3)$, $\overrightarrow{AO}(4;-7)$.

**60.** $\overrightarrow{AB}(1;-4)$, $\overrightarrow{CD}(-5;1)$, $\overrightarrow{EF}(-0{,}5;-1{,}5)$, $\overrightarrow{GH}(4\frac{1}{3};2\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{KL}(0;-2{,}3)$, $\overrightarrow{MN}(3{,}2;0)$, $\vec{0}(0;0)$.

**61.** $\vec{p}=-2\vec{j}$, $\vec{r}=3\vec{i}$, $\vec{s}=-6\vec{i}-6\vec{j}$, $t=-\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=3{,}7\vec{i}-4{,}6\vec{j}$, $\vec{z}=\sqrt{2}\,\vec{i}+\vec{j}$.

**62.** a) $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}$, $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$;
$\overrightarrow{OB}=2\vec{i}$, $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2^2+0^2}=2$;
$\overrightarrow{OC}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$;
$\overrightarrow{OD}=-\vec{i}-3\vec{j}$, $|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.

b) Iš viršūnės $C$ nubrėžkime rombo aukštinę $CH$. $\triangle CHD$ — statusis:
$CH=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$; $DH=CD\cdot\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Kitų dviejų rombo viršūnių koordinatės yra: $B\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$, $C\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.
$\overrightarrow{OA}=\vec{i}$, $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+0^2}=1$;
$\overrightarrow{OB}=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$, $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$;
$\overrightarrow{OC}=(2+\frac{\sqrt{3}}{2})\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$, $|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(2+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$;
$\overrightarrow{OD}=2\vec{i}$, $|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{2^2+0^2}=2$.

## 7.2. Vektorių veiksmai ir koordinatės

Išnagrinėję šio skyrelio medžiagą įsitikinsime, kad vektorių veiksmai ir veiksmai su jų koordinatėmis yra „suderinti“. Pavyzdžiui, jeigu vektorius sudedame, tai sumos koordinates gauname sudėję atitinkamas dėmenų koordinates ir t. t.
Svarbi išvada: pagal kiekvieną vektorinę lygybę galima užrašyti analogiškas lygybes vienai ir kitai koordinatei. Tai iliustruoja pirmas skyrelio pavyzdys.
Remiantis šia vektorinių ir koordinačių reiškinių atitiktimi, gaunama išvada apie vektoriaus su nurodytais pradžios ir galo taškais koordinates.
Verta pabrėžti, kad remiantis vektoriaus koordinatėmis galima nustatyti „geometrines“ vektoriaus savybes: ilgį, kolinearumą ar nekolinearumą su kitu vektoriumi. Nejučia vektorių tyrinėjimas vėl pavirto skaičiavimais ir skaitinių reiškinių tyrinėjimais.

***Mokame:***

rasti koordinates vektoriaus, užrašyto vektorine lygybe;

rasti vektoriaus koordinates, kai nurodytos pradžios ir galo taškų koordinatės;

remiantis koordinatėmis rasti vektoriaus ilgį;

nustatyti, ar du vektoriai kolinearūs, kai žinomos jų koordinatės.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pasirinkę kelias 63–65 pratimų užduotis išmokykime nustatyti reiškiniu apibrėžto vektoriaus koordinates. Po to galima iškart pereiti prie 70 pratimo. Vektorių koordinačių taikymui tiriant kolinearumą skirti 67–69 uždaviniai. Pakaktų išspręsti bent vieną šios grupės uždavinį. Taip pat reikėtų atlikti kelias 71 ir 72 pratimų užduotis. Jos reikalauja surasti vektoriaus ilgį, kai žinomos koordinatės.

**63.** a) $(-5; 8)$; b) $(4{,}3; -2{,}4)$; c) $(0; -1)$; d) $(3{,}3; -3{,}3)$.

**64.** a) $(4; 4)$; b) $\left(1\frac{1}{4}; -1\frac{1}{3}\right)$; c) $(8; -1)$; d) $(0; 7)$.

**65.** $3\vec{m}(12; -15)$; $-2\vec{m}(-8; 10)$; $-\vec{m}(-4; 5)$; $5{,}5\vec{m}(22; -27{,}5)$; $-0{,}1\vec{m}(-0{,}4; 0{,}5)$.

**66.** a) $\vec{p}(7; -14)$; b) $\vec{p}(-6; 12)$; c) $\vec{p}(-4{,}8; 9{,}6)$; d) $\vec{p}(-12; 24)$.

**67.** $\vec{r} = 10\vec{k}$, todėl vektoriai $\vec{k}$ ir $\vec{r}$ yra vienakrypčiai; $\vec{m} = -10\vec{n}$, todėl vektoriai $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ yra priešpriešiai.

**68.** Kolinearių vektorių koordinatės yra proporcingos: $\frac{-2}{x} = \frac{1}{-3}$, $x = 6$.

**69.** Sudarome proporciją: $\frac{x}{4{,}5} = \frac{2}{x}$, $x^2 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.
$x = -3$ netinka, nes tada $\vec{n} = -1{,}5\vec{m}$ ir vektoriai $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ būtų priešpriešiai.
*Atsakymas.* $x = 3$.

**70.** a) $\overrightarrow{AB}(3; 0)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$;
b) $\overrightarrow{AB}(-3; 4)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$;
c) $\overrightarrow{AB}(0; 10)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 10^2} = 10$;
d) $\overrightarrow{AB}(1; -1)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

**71.** a) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(2-8)^2 + (-8+16)^2} = 10$;
b) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1{,}5-2{,}5)^2} = 5$;
c) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(5+7)^2 + (7-2)^2} = 13$;
d) $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-1; -2)$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2} = 0$.

**72.** a) $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(6-14)^2 + (-7-8)^2} = 17$;
b) $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(10+2)^2 + (16-0)^2} = 20$;
c) $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-15+75)^2 + (-7+18)^2} = 61$;
d) $\vec{a} = -\vec{c}$, $\vec{b} = -2\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{c} + 2\vec{c} = \vec{c}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

# 8. VEKTORIŲ SKALIARINĖ DAUGYBA

## 8.1. Skaliarinės daugybos apibrėžimas

Skaliarinė daugyba apibrėžta vadovėlyje gana formaliai. Galima, žinoma, pasitelkti fizikos kontekstą, tačiau kita vertus, paprastai paaiškinti, kodėl jėgos atliktą darbą, kai nurodytas kūno poslinkio vektorius, natūralu reikšti tuo pačiu reiškiniu, kuriuo apibrėžiame ir skaliarinę vektorių sandaugą, nelengva.

Galima pabandyti naujo veiksmo poreikį argumentuoti pačia vektorių tyrinėjimo raida. Kokią naudą gavome iš vektorių veiksmų? Prisiminę trikampio vidurinės linijos savybės įrodymą, galėtume tvirtinti, kad įgijome galimybę nauju būdu nagrinėti sąryšius, susijusius su ilgiais, lygiagretumu. Tačiau apibrėžiant vektorių sudėties ir daugybos iš skaičių veiksmus, niekur nepanaudoti kampai. Vadinasi, remdamiesi vien vektoriais negalėsime nagrinėti geometrinių figūrų savybių, susijusių su kampais.

Taigi pabandykime įvesti dar vieną veiksmą — skaliarinę vektorių daugybą.

Pats skaliarinės sandaugos apibrėžimas nėra sudėtingas. Jį suformulavus iškart galima patyrinėti, kada skaliarinė sandauga teigiama, kada lygi nuliui, kada neigiama. Vadinasi, pagal skaliarinės sandaugos ženklą galima nustatyti, kokį kampą — smailų, statų ar buką — vektoriai sudaro. Vis šis tas!

O jeigu išmoktume skaliarinę sandaugą apskaičiuoti remdamiesi vien tik vektorių koordinatėmis, tai ir savybes, susijusias su kampais, galėtume nagrinėti be jokių brėžinių.

***Žinome:***

kampo tarp vektorių sąvoką;
skaliarinės sandaugos apibrėžimą;
vektorių statmenumo sąlygą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pirmieji du (73, 74) pratimai skirti kampo tarp vektorių sąvokai. Jei ši sąvoka aiški — galima pereiti prie skaliarinės sandaugos skaičiavimo pagal apibrėžimą (73, 75). Jei yra laiko galima panagrinėti 76, 78 ir 79 uždavinius, kuriuose vektoriai „atsiranda“ iš geometrinių brėžinių. Pavyzdžiui, galima patarti 78 uždavinį išspręsti pagal apibrėžimą apskaičiavus tris skaliarines sandaugas. Po to galima pasvarstyti, ar neverta prieš skaičiuojant sandaugas suprastinti reiškinį.

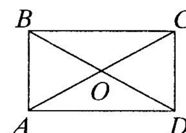
**73.** Kadangi $AB = \frac{1}{2}AC$, tai $\angle ACB = 30°$.

a) $\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})} = 30°$; b) $\widehat{(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DC})} = 60°$; c) $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = 60°$;

d) $\widehat{(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OC})} = \widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})} = 120°$; e) $\widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})} = 180°$;

f) $\widehat{(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC})} = \widehat{(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC})} = 0°$; g) $\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AO})} = \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{OC})} = 150°$;

h) $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA})} = \widehat{(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})} = 90°$; i) $\widehat{(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OA})} = \widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})} = 60°$.




**74.** a) $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = 60°$; b) $\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})} = 120°$;

c) $\widehat{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{DC})} = \widehat{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})} = 60°$; d) $\widehat{(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CD})} = 180°$;

e) $\widehat{(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EA})} = 0°$; f) $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB})} = 120°$.

**75.** a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16$;

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 5 \cdot \cos 0° = 30$;

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot \cos 180° = 0{,}8 \cdot (-1) = -0{,}8$;

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2{,}5 \cdot 1{,}4 \cdot \cos 150° = 3{,}5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

**76.** a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 12{,}5$;

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5 \cdot 2{,}5 \cdot \cos 60° = 6{,}25$;

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30° = 18{,}75$;

d) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, nes $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{DC}$;

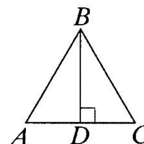
e) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{AD}|^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$;

f) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = 5 \cdot 5 \cdot \cos 180° = -25$;

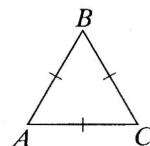
g) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 5 \cdot 5 \cdot \cos 120° = -12{,}5$;

h) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \cdot \cos 150° = -18{,}75$;

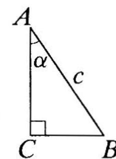
i) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2{,}5 \cdot 5 \cdot \cos 120° = -6{,}25$.



**77.** a) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 12{,}5$;
b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \cos 45° = 17\sqrt{2}$;
c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, nes $\vec{a} \perp \vec{b}$.




**78.** *I būdas.* $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$.
*II būdas.* $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{BC}|^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 - \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$.




**79.** *I būdas.* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + 0 = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|^2 = c^2$.
*II būdas.* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = c \cdot c \cdot \cos^2 \alpha + c \cdot c \cdot \cos^2(90° - \alpha) + 0 = c^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = c^2$.

## 8.2. Skaliarinės sandaugos reiškimas koordinatėmis

Paminėkime, kad jau žinome, kaip veiksmai su vektoriais susiję su jų koordinatėmis; visi veiksmai, išskyrus vieną — skaliarinę vektorių daugybą. Kaip galėtume skaliarinę vektorių daugybą išreikšti koordinatėmis? Apibrėžime naudojami vektorių ilgiai; kaip jie reiškiami koordinatėmis, žinome: šaknis iš koordinačių kvadratų sumos. Tačiau sudaromo kampo kosinusas... Turėtų būti sudėtinga! Ir staiga — formulė visai paprasta. Verta nustebti!
Skaliarinės sandaugos reiškimo koordinatėmis formulė pateikta kaip teorema. Tai vienintelė teorema su įrodymu šiame skyrelyje. Verta jį panagrinėti. Juolab, kad bus proga prisiminti kosinusų teoremą. Galbūt galima pasiūlyti patiems moksleiviams pertvarkyti skaliarinės sandaugos reiškinį, gautą iš šios teoremos, ir šitaip patirti palengvėjimą, kai viskas išsiprastina ir supaprastėja.
Įrodžius formulę, jau nebesunku nustatyti skaliarinės sandaugos savybes. O pati svarbiausia išvada tokia: jeigu vektorinis reiškinys sudarytas remiantis ne tik sudėties ir daugybos iš skaičių veiksmais, bet ir skaliarine daugyba, vistiek jį galima pertvarkinėti taip, kaip esame įpratę pertvarkinėti algebrinius reiškinius. Žinoma, skaliarinės daugybos ir daugybos iš skaičiaus painioti negalima!

***Žinome:***

skaliarinės daugybos reiškimo koordinatėmis formulę;
skaliarinės daugybos savybes.

***Mokame:***

skaičiuoti skaliarinę sandaugą pagal apibrėžimą;
skaičiuoti skaliarinę sandaugą naudojantis koordinatėmis;
pertvarkyti reiškinius su skaliarine daugyba;
rasti kampą tarp vektorių, kai duotos vektorių koordinatės.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Moksleiviai greitai išmoks įrašyti vektorių koordinates į formulę ir gauti skaliarinės sandaugos reikšmę. 80 ir 81 užduotys skirtos patikrinti, ar visi to išmoko. Atlikus kelias užduotis reikėtų išspęsti 82 ar 83 pratimą. Jie moko taikyti skaliarinę sandaugą statmenumo sąryšiams tyrinėti. Skyrelio pabaigoje pateikiama kampo tarp vektorių formulė, prašoma ją įrodyti. Tačiau užuot ją įrodinėjus, galbūt geriau išmokti skaičiuoti kampą tarp vektorių tiesiog pagal apibrėžimą (87). Po to galima sugrįžti ir prie formulės.

**80.** a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 4 + 3\cdot(-2) = 2$;
b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot(-1) + (-5)\cdot 1 = -5$;
c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -0{,}8\cdot(-0{,}5) + (-1{,}5)\cdot 2{,}4 = -3{,}2$;
d) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot(-3) + (-4)\cdot 4 = -25$.

**81.** $\vec{m}(2; -1)$; $\vec{n}(2; 3)$; $\vec{m}\cdot\vec{n} = 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = 1$.

**82.** a) Kadangi $\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\cdot 6 + 4\cdot 3 = 0$, tai $\vec{a}\perp\vec{b}$;
b) $\vec{b}(-2; -1)$; kadangi $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-2) + 3\cdot(-1) = -7 \neq 0$, tai $\vec{a}\not\perp\vec{b}$.

**83.** Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmeni, kai $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.
a) Sprendžiame lygtį: $-4x + 5\cdot(-2) = 0$, $x = -2{,}5$.
b) $\vec{n}(3 - x; 6)$; $\vec{m}\cdot\vec{n} = 3(3 - x) + 5\cdot 6$.
Sprendžiame lygtį: $3(3 - x) + 5\cdot 6 = 0$, $x = 13$.

**84.** a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 3\cdot\cos 120^\circ = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$.
b) Pagal kosinusų teoremą: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 120^\circ = 19$; $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{19}$.
c) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b}) = 2\vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}^2 = 2|\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{b}|^2 = 2\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 9 = 2$.

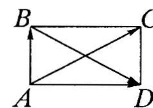
**85.** $\overrightarrow{CA}\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\overrightarrow{CB}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$. Vadinasi, $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ ir $\angle C = 90^\circ$.

**86.** $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

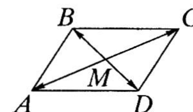
**87.** a) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{1\cdot 0+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Kadangi $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, tai $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 45^\circ$.
b) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{1{,}5\cdot 2+0\cdot(-2\sqrt{3})}{\sqrt{1{,}5^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}$; $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 60^\circ$.

# 9. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

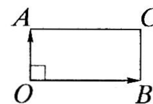
**2.** $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.



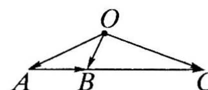

**3.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.




**4.** Papildome brėžinį iki stačiakampio $OACB$.
$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BA}|$.
Kadangi stačiakampio įstrižainės lygios, tai $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BA}|$, t. y.
$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

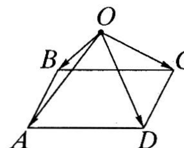



**5.** $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$. Abi lygybes panariui sudedame ir pritaikome sąlygos dalį, kad $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$:
$2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$, $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC}$,
$2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$, $3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.



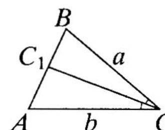

**6.** a) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$;
b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$;
c) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$.

**7.** $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

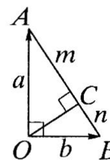



**8.** a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$;
b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CM}$.

**9.** a) Pagal trikampio pusiaukampinės savybę turime: $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{a}{b}$. Sudarome išvestinę proporciją: $\frac{BC_1}{BC_1 + C_1A} = \frac{a}{a+b}$, $\frac{BC_1}{BA} = \frac{a}{a+b}$.
b) Remdamiesi a) punktu, gauname: $\overrightarrow{BC_1} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$. Tada:
$\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CB} = \frac{a}{a+b}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$; $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} - \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB}\left(1 - \frac{a}{a+b}\right) + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CC_1} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b}$.




**10.** Tegul $AC = m$, $CB = n$.
a) Žinome, kad $a^2 = mAB$ ir $b^2 = nAB$. Tada $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} = \frac{a^2}{AB} : \frac{b^2}{AB} = \frac{a^2}{b^2}$.
b) Iš proporcijos $\frac{AC}{CB} = \frac{a^2}{b^2}$ gauname išvestinę proporciją: $\frac{AC}{AC+CB} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$,
$\frac{AC}{AB} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$. Vadinasi, $\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AB}^2$.
c) Iš lygybės $\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AB}$ gauname: $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{a^2}{a^2+b^2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$;
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{OB} - \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}\right)\overrightarrow{OA}$;
$\overrightarrow{OC} = \frac{a^2\overrightarrow{OB} + b^2\overrightarrow{OA}}{a^2+b^2}$.




**11.** (2; 5) ir (0; −2).

**12.** $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$.

**13.** $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$.

**15.** $\overrightarrow{AB}(1; 1)$, $\overrightarrow{CA}(1; 1)$. Vadinasi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$.

**16.** $\overrightarrow{BA}(5; 2)$, $\overrightarrow{CM}(x - 1; y + 3)$. Sprendžiame sistemą:
$$\begin{cases} x - 1 = 5, \\ y + 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = -1. \end{cases}$$
*Atsakymas.* $M(6; -1)$.

17. a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot2\cdot\cos30^\circ=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$;
b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2{,}4\cdot1{,}5\cdot\cos120^\circ=3{,}6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1{,}8$;
c) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot3+1\cdot0=-6$;
d) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1{,}2\cdot2{,}5+(-3)\cdot1{,}4=-1{,}2$.

18. $\vec{a}\perp\vec{b}$, kai $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Sprendžiame lygtį: $-4+3n=0$, $n=1\frac{1}{3}$.

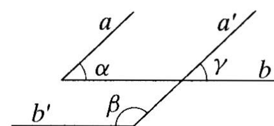
19. Vektoriaus $\vec{a}+m\vec{b}$ koordinatės yra $(1-3m;\,4+2m)$. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{a}+m\vec{b}$ bus statmeni, kai $\vec{a}\cdot(\vec{a}+m\vec{b})=0$. Sprendžiame lygtį: $(1-3m)+4(4+2m)=0$, $m=-3{,}4$.

20. $\cos(\widehat{\vec{c},\vec{d}})=\frac{1\cdot2+1\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(\frac{1}{2})^2}}=\frac{2{,}5}{\sqrt{8{,}5}}=\frac{5}{2\sqrt{8{,}5}}=\frac{5}{\sqrt{34}}$.

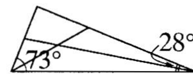
21. $\angle 1=\angle A=66^\circ$ — vidaus priešiniai kampai ($AB\parallel CD$, $AC$ — kirstinė). $\angle 2=\angle 1=66^\circ$, nes $CD$ — pusiaukampinė. $\angle 2=\angle B=66^\circ$ — atitinkamieji kampai prie lygiagrečių tiesių $AB$ ir $CD$ bei kirstinės $BC$. Vadinasi, $AC=BC$ ir $\triangle ABC$ — lygiašonis.

22. *Nurodymas.* Pratęskite $OB$ iki susikirtimo su $O_1A_1$ ir nagrinėkite lygius atitinkamuosius kampus prie dviejų lygiagrečių tiesių ir kirstinės.

23. Kadangi $a\parallel a'$, tai $\alpha=\gamma$; kadangi $b\parallel b'$, tai $\beta+\gamma=180^\circ$. Taigi $\alpha+\beta=180^\circ$.

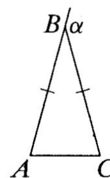


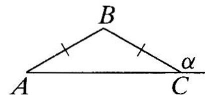

24. Duotųjų kampų pusių suma lygi $\frac{1}{2}(73^\circ+28^\circ)=50{,}5^\circ$, t. y. $50^\circ30'$. Mažesnysis kampas, kuriuo kertasi šių kampų pusiaukampinės, yra gautojo trikampio priekampis, todėl lygus $50^\circ30'$.




25. Kadangi $\angle BAC=\angle BDE$, o $\angle B$ — bendras, tai $\triangle ABC\backsim\triangle DBE$. Vadinasi, $\angle C=\angle BED$.

26. Tegul $AB=BC$, o priekampis yra $\alpha$. Tada $\alpha=330^\circ-180^\circ=150^\circ$. Kai priekampis yra prie trikampio viršūnės $B$, tai $\angle B=180^\circ-150^\circ=30^\circ$, o kampai prie pagrindo lygūs po $(180^\circ-30^\circ):2=75^\circ$.
Kai priekampis yra prie pagrindo, tai kampai prie trikampio pagrindo lygūs po $30^\circ$, o kampas prie viršūnės $B$ lygus $180^\circ-2\cdot30^\circ=120^\circ$.
*Atsakymas.* $30^\circ$, $75^\circ$, $75^\circ$ arba $30^\circ$, $30^\circ$, $120^\circ$.




27. a) Iš trikampių $ABM$ ir $CDM$ panašumo: $\frac{x}{4}=\frac{3}{5}$, $x=2{,}4$; $\frac{y}{y+3}=\frac{3}{5}$, $y=4{,}5$.
b) Pažymėkime $AC\cap BD=O$. Kadangi $\angle C=\angle A$, $\angle D=\angle B$, tai $\triangle CDO\backsim\triangle ABO$. Iš trikampių panašumo:
$\frac{x}{3}=\frac{x}{y}=\frac{1}{2{,}5}$, $x=\frac{3\cdot1}{2{,}5}=1{,}2$, $y=\frac{3\cdot1{,}2}{1{,}2}=3$.

28. $BD=AB-AD=6-2=4\,(\text{cm})$. $\triangle DBE\backsim\triangle ABC$: $\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}$, $\frac{4}{6}=\frac{BE}{9}$, $BE=6\,\text{cm}$. $EC=BC-BE=9-6=3\,(\text{cm})$.
*Atsakymas.* $BE=6\,\text{cm}$, $EC=3\,\text{cm}$.

29. Kadangi $OC=60\,\text{cm}$ atitinka 5 dalis, tai vienai daliai tenka $60:5=12\,(\text{cm})$. Tada $OA=12\cdot3=36\,(\text{cm})$, $AC=12\cdot2=24\,(\text{cm})$, $CE=12\cdot2{,}5=30\,(\text{cm})$. Tuomet $\frac{3}{2}=\frac{OB}{30}$, $OB=45\,\text{cm}$; $\frac{3}{45}=\frac{2{,}5}{DF}$, $DF=37{,}5\,\text{cm}$; $\frac{CD}{80}=\frac{60}{90}$, $CD=53\frac{1}{3}\,\text{cm}$; $\frac{AB}{80}=\frac{36}{90}$, $AB=32\,\text{cm}$.

30. Tegul duotojo trikampio kraštinių ilgių santykis yra $AB:BC:CA=5:6:7$. Vienai daliai tenka $\frac{36}{2{,}5+3+3{,}5}=4\,(\text{cm})$.
Tada $AB=4\cdot5=20\,(\text{cm})$, $BC=4\cdot6=24\,(\text{cm})$, $AC=4\cdot7=28\,(\text{cm})$.

31. Kadangi $\angle 1=\angle 2$, $\angle C$ — bendras, tai $\triangle ABC\backsim\triangle DAC$. Tada $\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{AC}$, $\frac{10}{DC}=\frac{25}{10}$, $DC=4\,\text{cm}$.

32. Iš trikampių panašumo (pagal du kampus):
$\frac{8}{y}=\frac{10}{26}$, $y=20{,}8$; $\frac{x}{x+20}=\frac{10}{26}$, $x=12{,}5$.

33. a) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$, nes $\frac{12}{9}=\frac{16}{12}$; $\angle B=\angle B_1$ — duota. Trikampiai $ABC$ ir $A_1B_1C_1$ panašūs pagal dvi atitinkamai proporcingas kraštines ir lygius kampus tarp jų.
b) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, nes $\frac{3{,}6}{1{,}5}=\frac{6}{2{,}5}=\frac{8{,}4}{3{,}5}$. Trikampiai $ABC$ ir $A_1B_1C_1$ panašūs pagal tris atitinkamai proporcingas kraštines.

**34.** Trikampis $ADC$ — statusis, tai $\angle ACD = 90° - \angle A$; trikampis $ABC$ — statusis, tai $\angle B = 90° - \angle A$. Taigi $\angle ACD = \angle B$. Vadinasi, $\triangle ADC \backsim \triangle CDB$ (pagal du kampus). Todėl $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$.

**35.** Kadangi $\angle ACD = \angle B$ (žr. 34 uždavinį), $\angle A$ — bendras, tai $\angle ADC \backsim \triangle ACB$. Todėl $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$, $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$.
Kadangi $\angle BCD = 90° - \angle B$, $\angle A = 90° - \angle B$, tai $\angle BCD = \angle A$. Vadinasi, $\triangle BDC \backsim \triangle BCA$ (pagal du kampus). Todėl $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$, $BC = \sqrt{AB \cdot BD}$.

**36.** Kai $a \geqslant 0$, turime nelygybę $-a \leqslant a \leqslant a$, kuri yra teisinga; kai $a < 0$, turime nelygybę $a \leqslant a \leqslant -a$, kuri taip pat yra teisinga.

**37.** a) $-1\frac{5}{8}$; b) $1\frac{1}{3}$; c) 15.

**38.** $\frac{a}{a+b}$.

**39.** a) $\frac{x^2+y^2}{xy}$; b) $\frac{4}{xy}$; c) $\sqrt{\frac{a}{c}}$.

**40.** Kai $x \neq 0$, reiškinys suprastinamas:
$-\frac{4x}{x^2-1} \cdot \left(-\frac{(x-1)^2}{4x}\right) = \frac{x-1}{x+1} < 0$, kai $-1 < x < 1$.

**41.** Duotoji trupmena nesuprastinama, jeigu nesuprastinama trupmena $\frac{n}{n^2+1}$, nes $\frac{n^3+2n}{n^2+1} = n + \frac{n}{n^2+1}$. Skaičiai $n$ ir $n^2+1$ bendrų daliklių neturi, todėl trupmena $\frac{n}{n^2+1}$ yra nesuprastinama.
*Griežtesnis įrodymas.* Sakykime, kad $n^3 + 2n$ ir $n^2 + 1$ turi bendrą daliklį $d$. Įrodysime, kad $d = \pm 1$, tai ir reikš, kad trupmena nesuprastinama. Iš tikrųjų, tegu $n^3 + 2n = ad$, $n^2 + 1 = bd$. Kombinuodami lygybes, žeminame $n$ laipsnį:
$n^3 + 2n - n(n^2 + 1) = n = ad - nbd$;
$n^2 + 1 - n \cdot n = 1 = bd - n(ad - nbd) = d(b - na + n^2 b)$.
Matome, kad 1 dalijasi iš $d$, o tai ir reiškia, kad $d = \pm 1$.

**42.** a) $3 - \sqrt{3}$; b) 2; c) $10 - 2\sqrt{23}$; d) $2\sqrt{3} - 1$; e) $4\sqrt{ab}$; f) $4\sqrt{a^2 - 1}$; g) $20\sqrt{2a + 3}$; h) $2m + 1$.

**43.** Lygybė akivaizdžiai negalioja, kai $a < b$ — tuomet jos kairės pusės reiškinys yra teigiamas, o dešinės — neigiamas.

**44.** a) $2+\sqrt{3}+\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}$. *Nurodymas.* Iš pradžių skaitiklį ir vardiklį padauginkite iš $\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, po to — iš $\sqrt{3}+1$.
b) $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{a-b}$. *Nurodymas.* Iracionalumą vardiklyje panaikinsite skaitiklį ir vardiklį padauginę iš $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, po to — iš $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; čia turima galvoje, kad $a > b \geqslant 0$.

**45.** a) *Nurodymas.* $26 \pm 15\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^3$. Taip pat galima abi puses kelti kubu ir remtis lygybe $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.
b) Lengviau įrodyti nelygybę $a^2 + 2 \geqslant 2\sqrt{a^2 + 1}$; $(a^2 + 2)^2 \geqslant 4(a^2 + 1)$; $a^4 \geqslant 0$.
c) *Pastaba.* Nelygybė turi būti tokia: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 2 \geqslant 0$. Tada $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x$, $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 = x^2$, $x^2 - 2x \geqslant 0$, $x(x - 2) \geqslant 0$.
Kadangi $x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, kai $a > 0$, $b > 0$, tai duotoji nelygybė yra teisinga.

**46.** 1.

**47.** Teisingas „mokiniškas" sprendimas galėtų atrodyti taip. Lygtį dauginame iš $c^2(x - a)(x - b)$, bet pasižadame tikrinti, ar gauti kvadratinės lygties $x^2 + (2c^2 - a - b)x + ab - c^2a - c^2b = 0$ sprendiniai nelygūs $a$ arba $b$.
Kvadratinės lygties diskriminantas $D = (2c^2 - a - b)^2 - 4(ab - c^2a - c^2b) = 4c^2 - 4c^2(a + b) + (a + b)^2 - 4ab + 4c^2(a + b) = (a - b)^2 + 4c^4 > 0$, nes $c \neq 0$, taigi lygtis turi du sprendinius. Tikriname, ar gali sprendinys būti lygus $a$ (arba $b$):
$\frac{-(2c^2-a-b)\pm\sqrt{(a-b)^2+4c^4}}{2} = a$,
$\pm\sqrt{(a - b)^2 + 4c^4} = 2c^2 + a - b$,
$(a - b)^2 + 4c^4 = 4c^4 + 4c^2(a - b) + (a - b)^2$, $4c^2(a - b) = 0$.
(Lygiai tą patį gauname tikrindami, kada sprendinys gali būti lygus $b$.) Vadinasi, jeigu $a \neq b$, tai kvadratinės lygties abu sprendiniai tinka pradinei lygčiai.
Jeigu $b = a$, tai kvadratinės lygties sprendiniai yra

$\frac{-(2c^2-2a)\pm\sqrt{4c^4}}{2} = a - c^2 \pm c^2$, ir vienas sprendinys lygus $a$, o kitas sprendinys $a - 2c^2$ nelygus $a$. Vadinasi, pradinė lygtis visada turi sprendinių.
Tas pats sprendimas, užrašytas „mokytojiškai", būtų toks.
Kai $a = b$, gauname lygtį $\frac{2}{x-a} = \frac{1}{c^2}$, kuri turi sprendinį $x = a + 2c^2$.
Kai $a \neq b$, dauginkime lygtį iš $c^2(x-a)(x-b)$ ir įsitikinkime, kad gautoji kvadratinė lygtis turi sprendinių, nelygių $a$ ir $b$. Kadangi $D > 0$, tai ji turi du nelygius sprendinius. Bet nei vienas sprendinys nėra lygus $a$, nes įstatę $x = a$ į kvadratinę lygtį, gautume $a^2 + (2c^2 - a - b)a + ab - c^2a - c^2b = 0$, $c^2(a-b) = 0$, o taip nėra (juk $c \neq 0$, $a \neq b$). Įstatyti $x = b$ nebūtina: net jeigu vienas iš sprendinių būtų lygus $b$, tai kitas — ne.
Vadinasi, pradinė lygtis visada turi sprendinių.
Žinoma, trumpiausias sprendimas — remiantis tolydumu. Sakykime, kad $a \geqslant b$. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$ apibrėžta ir tolydi intervale $(a; +\infty)$ ir kinta nuo $+\infty$ iki 0, todėl įgyja ir reikšmę $\frac{1}{c^2}$.

**48.** a) $(0; 4)$, $\left(\frac{1}{4}; 4\frac{3}{4}\right)$;
b) $(-3; 1)$, $(3; -1)$, $\left(\frac{25}{\sqrt{53}}; \frac{4}{\sqrt{53}}\right)$, $\left(-\frac{25}{\sqrt{53}}; -\frac{4}{\sqrt{53}}\right)$. *Nurodymas.* Pirmą lygtį padauginę iš $-22$, antrą — iš 13 ir jas sudėję, gausime homogeninę lygtį $4x^2 - 13xy - 75y^2 = 0$, $4\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 13\frac{x}{y} - 75 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{25}{4}$ arba $\frac{x}{y} = -3$.
c) $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{3}\right)$;
d) $(9; 4)$, $(4; 9)$.
*Sprendimas.* $\begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 30, \\ (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = 35, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{65}{30} \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = 35, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2} \text{ arba } \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 9, y = 4$ arba $x = 4, y = 9$.

**49.** a) $(-2; -1] \cup [1; 4)$. *Nurodymas.* $\begin{cases} x \geqslant 1 \text{ arba } x \leqslant -1, \\ -2 < x < 4; \end{cases}$
b) $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$; c) $(2; 3)$; d) $(-3 - \sqrt{7}; -3)$.

**50.** $p^3 - 3pq$.
*Nurodymas.* $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2\right)$.

**51.** a) $-2\frac{2}{3}$; 1. *Nurodymas.* $3x^2 + 5x + 1 = y \Rightarrow \sqrt{y+7} - \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$ arba $x = 1$;
b) $-6{,}5$; 4; c) $-\frac{1}{3}$; 1.

**52.** a) $(-\infty; -3) \cup \left[-\frac{3}{5}; -\frac{1}{3}\right)$;
b) $\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
*Nurodymas.* Pasižymėkime $x - \frac{1}{x} = t$. Gavę $-3 < t < -1$, grįžtame prie $x$ ir sprendžiame nelygybes $-3 < x - \frac{1}{x} < -1$;
c) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

# III. FUNKCIJOS

## 10. FUNKCIJOS SĄVOKA

Pradedame didelį, vieną iš pačių svarbiausių mokyklinės matematikos skyrių. Verta trumpai aptarti, ką iki šiol veikėme ir ką nagrinėsime dabar.

Ką veikėme? Skaičiavome, sprendėme lygtis ir nelygybes... Kitaip tariant — ieškojome skaičių, kurie turi tam tikras savybes (tenkina tam tikras lygybes ar nelygybes). Skaičiai yra labai svarbūs mus supančiam pasauliui aprašyti: jie naudojami matuojant, lyginant. Tačiau skaičių pasaulis yra kažkoks „nejudrus", „užbaigtas", o apie tikrovę, kurioje gyvename, galvojame kažkaip kitaip... Pavyzdžiui, perskaitę žodžius „oro temperatūra" juk neįsivaizduojame skaičiaus, kuris ir rytoj, ir poryt bus toks pat. Įsivaizduojame kažką, kas keičiasi: didėja, mažėja ir t. t. Kitaip tariant — įsivaizduojame kintamą dydį, kuris gali įgyti tam tikras reikšmes. Kintamieji dydžiai ir yra pagrindiniai šio skyriaus herojai, o pagrindinis tyrimo tikslas — tirti, kaip du kintamieji dydžiai gali būti tarpusavyje susiję.

### 10.1. Funkcija ir jos reiškimo būdai

Pasiūlykime įsivaizduoti, pavyzdžiui, kad nuo kranto į ežerą metame akmenį. Su šiuo bandymu galima susieti du kintamus dydžius: laiką $t$ (tarkime, matuojamą sekundėmis), praėjusį nuo akmens metimo momento, ir akmens aukštį virš vandens $h$ (tarkime, matuojamą metrais). Laiką reiškiančio kintamojo reikšmės didėja, o aukščio $h$ reikšmės iš pradžių (tikriausiai) didėja, po to mažėja. Kai išgirstame pliumptelėjimą, žinome, kad $h = 0$. Galima pasiūlyti pasamprotauti, kaip aukštis $h$ kinta toliau...

Laikas $t$ — nepriklausomas kintamasis (visomis prasmėmis, juk laiko „nei sustabdysi, nei pasuksi atgal"), o kintamojo $h$ reikšmė priklauso nuo to, kiek sekundžių praėjo nuo akmens metimo momento. Taigi turime kintamųjų porą. Nepriklausomas kintamasis įgyja visas neneigiamas reikšmes. O kokias reikšmes įgyja priklausomas kintamasis $h$?

Gamta „žino" taisyklę, pagal kurią kiekvienai $t$ reikšmei „priskiriama" vienintelė priklausomo kintamojo $h$ reikšmė. Ta taisyklė ir yra vadinama funkcija. Nesvarbu, ar laiką žymėsime $t$, $s$ ar dar kitaip, nesvarbu, kaip žymėsime aukštį — taisyklė liks ta pati.

Dabar galima perskaityti (arba pasiūlyti perskaityti) mėlyname fone užrašytą funkcijos apibrėžimą.

Galima atkreipti dėmesį, kad yra pačių įvairiausių funkcijų. Jos gali skirtis, pavyzdžiui, jau apibrėžimo sritimis. Galima nagrinėti ir tokias funkcijas, kurių apibrėžimo sritys — baigtinės aibės, žr. antrąjį skyrelio pavyzdį.

Kaip išreikšti tą taisyklę, pagal kurią nepriklausomo kintamojo reikšmėms priskiriamos priklausomo kintamojo reikšmės? Galima pasitelkti tai, ką jau nagrinėjome: algebrinius reiškinius. Užrašykime formulę, reiškiančią rutulio tūrį, kai nepriklausomas kintamasis — rutulio spindulys. Žinoma, tai nieko naujo... Tačiau galima atkreipti dėmesį, koks tai puikus išradimas — formulės. Kaip reikėtų žodžiais nusakyti šią funkciją, jeigu formulių rašyti nemokėtume?

Galima pastebėti, kad formulės, vos tik užrašytos, jau tarsi pradeda „gyventi savo gyvenimą". Iš tikrųjų, galvodami apie funkciją, kurios nepriklausomas kintamasis $R$ yra rutulio spindulys, o priklausomas $V$ — tūris, manome, kad šios funkcijos apibrėžimo sritis — visi neneigiami realieji skaičiai. Tačiau jeigu šią formulę užrašysime ir nepaaiškinsime, kokia yra kintamųjų $R$ ir $V$ prasmė, kas nors gali imti ir neigiamas $R$ reikšmes ir manyti, jog užrašytos šia formule funkcijos apibrėžimo sritis — visi realieji skaičiai. Taigi norint apibrėžti funkciją, nepakanka užrašyti formulę, dar reikia ir nurodyti, kokias reikšmes gali įgyti nepriklausomas kintamasis, t. y. reikia nurodyti funkcijos apibrėžimo sritį.

Dabar galima pabrėžti mėlyname fone užrašytą susitarimą dėl formulėmis užrašytų funkcijų apibrėžimo srities.

Formulės, sudarytos remiantis algebriniais reiškiniais, puikus išradimas, tačiau ne visagalis. Kartais žodžiais nusakyti funkciją visai paprasta, tačiau formule užrašyti net neįmanoma. Pavyzdžiui, nagrinėkime funkciją, kuri kiekvienai kintamojo $x$ reikšmei priskiria jo sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveiką skaičių, kuris yra ne didesnis už $x$. Jeigu tokia žodžiais nusakyta funkcija yra dažnai naudojama ir svarbi, kartais gudraujama — sugalvojama jai specialus žymuo, pavyzdžiui, sveikoji skaičiaus $x$ dalis žymima $[x]$. Tada ir šią žodžiais nusakytą funkciją galima užrašyti formule $y = [x]$, tačiau tai jau tokia formulė, kurios žymenis reikia paaiškinti.

Galima pasiūlyti sugalvoti daugiau tokių paprastai žodžiais nusakomų funkcijų, kurioms užrašyti nėra (arba sunku sugalvoti) formulių. Galima pasiūlyti parinkti sugalvotai funkcijai žymėti naujus žymenis. Kurti patogius matematinius žymenis ir remtis jais reiškiant matematines mintis — svarbi praktika!

Antra itin svarbi, nors ir ne nauja sąvoka — funkcijos grafikas. Grafiko apibrėžimas trumpas ir, reikia tikėtis, gana aiškus. Verta priminti, kaip „skaityti“ grafiką: nurodytai nepriklausomojo kintamojo $x$ reikšmei surasti priklausomojo kintamojo reikšmę; žinant, kokią reikšmę įgijo priklausomasis kintamasis, rasti nepriklausomojo kintamojo reikšmę. Galima nubrėžus kokios nors funkcijos grafiką paklausti, pavyzdžiui: su kuriomis nepriklausomojo kintamojo reikšmėmis funkcijos reikšmės yra teigiamos, neigiamos, didesnės už 1 ir t. t.; kaip kinta priklausomojo kintamojo reikšmės, kai nepriklausomasis kintamasis įgyja reikšmes iš tam tikro intervalo...

*Įsivaizduojame ir žinome:*
kintamuosius dydžius;
nepriklausomojo ir priklausomojo kintamųjų ryšį;
funkcijos sąvoką;
funkcijos grafiko sąvoką.

***Mokame:***
apskaičiuoti funkcijos reikšmes, kai funkcija apibrėžta formule;
„skaityti“ funkcijų grafikus;
atpažinti plokštumos kreives, kurios yra tam tikrų funkcijų grafikai.

## PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

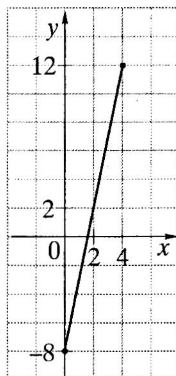
Šio skyrelio uždaviniuose reikalaujama apskaičiuoti funkcijų reikšmes, nustatyti apibrėžimo ir reikšmių sritis. Taigi reikalavimų įvairovė nedidelė, tačiau funkcijos gana keistos, pvz., 5 pratime. Svarbu, kad moksleiviai suvoktų, jog apibrėžiant funkciją nepakanka vien nurodyti, kaip skaičiuojamos jos reikšmės. Pirmasis skyrelio uždavinys skirtas priminti, kaip reikia „skaityti“ funkcijų grafikus. Sugaišus kelias minutes nagrinėjant grafikus, galima pereiti prie funkcijų, apibrėžtų formulėmis. Skyrelyje yra daug pratimų apie taip apibrėžtas funkcijas: reikšmių skaičiavimo uždaviniai (3, 4, 11), formulių sudarymo (6–10), apibrėžimo ir reikšmių sričių nustatymo (18–22) ir kitokių. Visų jų išspręsti nebūtina, verčiau atsirinkti iš kiekvienos grupės po kelis. Jei yra laiko, galima jo skirti ir keistesnėms nei įprastos funkcijoms (5, 23).

**1.** $D_f = [-1; 2]$, $E_f = [0{,}5; 2]$; $D_g = [-1; 3)$, $E_g = (-1; 1{,}5]$; $D_h = [-2; 3)$, $E_h = [-1; 2]$.

**2.** a)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-8$ | $-3$ | 2 | 7 | 12 |

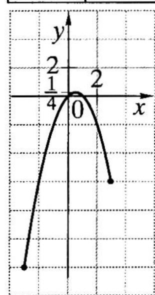
$E_f = [-8; 12]$;




b)

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-12$ | $-6$ | $-2$ | 0 | 0 | $-2$ | $-6$ |

$E_f = \left[-12; \frac{1}{4}\right]$;

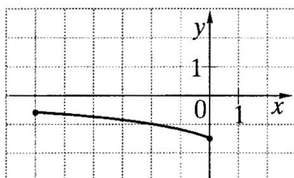



*Pastaba.* Reikšmių sričiai nustatyti reikia apskaičiuoti parabolės $y = x - x^2$ viršūnės koordinates.

c)

| $x$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\frac{3}{5}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{6}{7}$ | $-1$ | $-1\frac{1}{5}$ | $-1\frac{1}{2}$ |

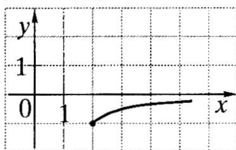
$E_f = \left[-1\frac{1}{2}; -\frac{3}{5}\right]$;




d)

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{5}$ | … |

$E_f = [-1; 0)$.




**3.**

| $x$ | 2 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{a}$ | $\frac{a}{3}$ | $a+1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=(x-2)^3$ | 0 | $-12\frac{19}{27}$ | $\frac{1}{a^3}-\frac{6}{a^2}+\frac{12}{a}-8$ | $\frac{a^3}{27}-\frac{2a^2}{3}+4a-8$ | $a^3-3a^2+3a-1$ |
| $f(x)=x^3+3x-1$ | 13 | $-2\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{a^3}+\frac{3}{a}-1$ | $\frac{a^3}{27}+a-1$ | $a^3+3a^2+6a+3$ |
| $f(x)=3x^2-5x+7$ | 9 | 9 | $\frac{3}{a^2}-\frac{5}{a}+7$ | $\frac{a^2}{3}-\frac{5a}{3}+7$ | $3a^2+a+5$ |

**4.** a) $f(3)=0$, $f(-5)=10$, $f(0)=0$;
b) $f(3)=9$, $f(-5)=-25$, $f(0)=0$.

**5.** $E_f=\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
a) $f(2{,}34)=4$; b) $f(\pi)=4$; c) $f(\sqrt{3})=3$; d) $f(6)=0$; e) $f\left(\frac{1}{3}\right)=3$.

**6.** Kai $n=3$, tai $f(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; kai $n=4$, tai $f(x)=x^2$; kai $n=6$, tai $f(x)=\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$.

**7.** Sprendžiame lygčių sistemą:
a) $\begin{cases} a\cdot 0+b=-7, \\ 3a+b=2; \end{cases}$ $a=3$, $b=-7$; b) $\begin{cases} a\cdot 0+b=6, \\ -2a+b=14; \end{cases}$ $a=-4$, $b=6$.

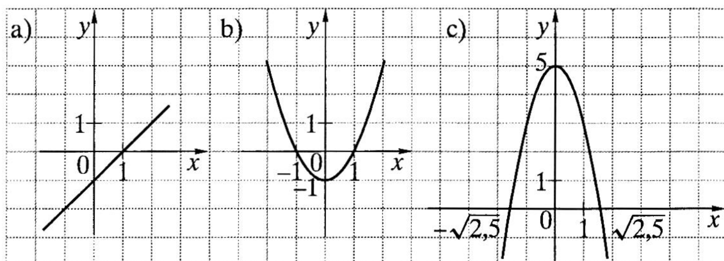
**8.** Sprendžiame lygčių sistemą:
a) $\begin{cases} a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0, \\ a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=5, \\ 4a-2b+c=26; \end{cases}$ $a=6$, $b=-1$, $c=0$;
b) $\begin{cases} a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=-7, \\ a-b+c=13, \\ 4a+2b+c=-19; \end{cases}$ $a=4\frac{2}{3}$, $b=-15\frac{1}{3}$, $c=-7$.

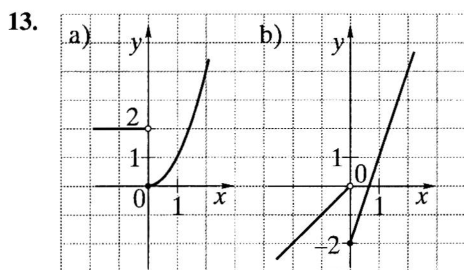
**9.** $a(R)=2R$.

**10.** $a(R)=\sqrt{2}R$.

**11.** a) $f(0)=0^2-1=-1$, $f(-2)=1+(-2)^2=5$, $f(2)=2^2-1=3$;
b) $f(0)=4-0=4$, $f(-2)=4-(-2)=6$, $f(2)=|2|=2$;
c) $f(0)=\frac{7}{0+1}=7$, $f(-2)=\frac{-2+1}{7}=-\frac{1}{7}$, $f(2)=\frac{7}{2+1}=2\frac{1}{3}$;
d) $f(0)=0^2+2=2$, $f(-2)=2-(-2)^2=-2$, $f(2)=2-2^2=-2$.

**12.**

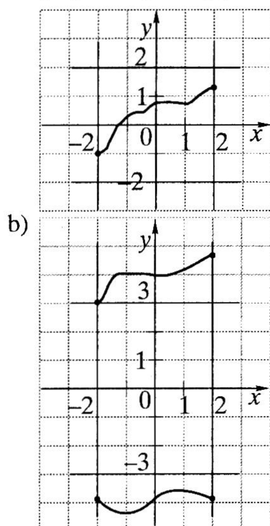


**13.** 


**14.** a) $158\frac{1}{3}\pi$; b) $149\frac{1}{3}\pi$.

**15.** a) $E_f = [0; 9]$; b) $E_f = [0; 1]$; c) $E_f = [0; 16]$.

**16.** a) Galima pastebėti, kad sąlyga $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$ reiškia, jog grafikas turi „tilpti“ tarp dviejų tiesių $y = -2$ ir $y = 2$. Pavyzdžiui:




**17.**

| $x$ | 1 | $-2$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $a$ | $\frac{1}{a}$ | $\frac{a-1}{a+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ | 1 | $-2\frac{3}{4}$ | $-5\frac{2}{3}$ | $-20\frac{1}{4}$ | $a + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}$ | $\frac{1}{a} + a - a^2$ | $\frac{a^3-5a^2-a-3}{(a-1)^2(a+1)}$ |

**18.** a) $x = \boldsymbol{R}$; b) $x \neq 0$; c) $x \neq -2$ ir $x \neq 2$; d) $x = \boldsymbol{R}$; e) $x \neq 1$; f) $-2 \leqslant x \leqslant 2$; g) $x \neq -1$; h) $x \leqslant -3$ ir $x \geqslant 3$; i) $x \neq 1$ ir $x \neq 6$; j) $x \neq 2$ ir $x \neq 3$; k) $x < -2$ ir $x > 2$; l) $-4 < x < 4$.

**19.** $V(x) = x \cdot (1 - 2x)^2$, $x \in (0; 0,5)$.

**20.** $E_f = (-\infty; 4]$; a) $E_f = [-5; 4]$; b) $E_f = [-21; 3]$; c) $E_f = [0; 4]$.

**21.** a) $x \neq -3$; b) $f(-6) = 3$, $f(0) = -1$, $f(4) = \frac{1}{7}$; $f(x) = 3$, kai $x = -6$; $f(x) = -\frac{1}{2}$, kai $x = 1$. Funkcija $f(x)$ neįgyja reikšmės 1.

**22.** a) $x > -2$; b) $f(4) = \frac{2}{3}\sqrt{6}$, $f(12) = \frac{6}{7}\sqrt{14}$, $f(18) = \frac{9}{5}\sqrt{5}$; $f(x) = 0$, kai $x = 0$; $f(x) = 1$, kai $x = 2$; $f(x) = 2\frac{1}{3}$, kai $x = 7$.

**23.** a) $-2$; b) $-1$; c) $-13$; d) $0,8$; e) 1; f) $\frac{1}{15}$.

**24.** a) $20,4 = 20 + 0,4$; b) $0,32 = 0 + 0,32$; c) $-4,5 = -5 + 0,5$; d) $14,3 = 14 + 0,3$; e) $-14,3 = -15 + 0,7$; f) $-0,48 = -1 + 0,52$; g) $-1,(2) = -2 + \frac{7}{9}$; h) $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$; i) $-\frac{17}{8} = -3 + \frac{7}{8}$; j) $\sqrt{2} = 1 + 0,4142...$; k) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2 + 0,4142...$; l) $\pi = 3 + 0,14...$

**25.** Kadangi $f(n) = 4n - 3$, $f(-n) = -4n - 3$, tai $f(n) + f(-n) = -6$. Todėl $f(15) + f(-15) = -6$ ir t. t. Tokių sumų bus 15. Atskirai reikia apskaičiuoti $f(0) = -3$ ir $f(16) = 61$. Taigi ieškoma suma $-6 \cdot 15 + (-3) + 61 = -32$.

Skyrelis prasideda brėžiniu, iliustruojančiu funkciją $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Kaip nepriklausomojo kintamojo reikšmėms priskiriamos priklausomojo kintamojo reikšmės, rodo strėlės. Visai paprasta idėja: strėles galima apgręžti! Ką gi gauname? Naują funkciją. Kas atsitinka su pirmosios funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritimis? Jos apsikeičia vaidmenimis. Skaičių aibė, kuri buvo reikšmių sritimi, dabar tampa apibrėžimo sritimi ir atvirkščiai. Naujoji funkcija pavadinama funkcija, atvirkštine pirmajai. 1 užduotyje siūloma iš užrašytos formulės išreikšti dydį $R$ dydžiu $V$. Galima paaiškinti, kad tas išreiškimas tai ir yra brėžinio strėlių „apgręžimas“.

Iš esmės šio brėžinio ir tokių komentarų užtenka atvirkštinės funkcijos esmei paaiškinti. Kas dar yra pirmajame šio skyrelio puslapyje? Brėžinys, rodantis, kad atvirkštines funkcijas gali turėti ir tokios funkcijos, kurių apibrėžimo sritis nėra intervalas. Galima šį teksto fragmentą tiesiog praleisti, jeigu taupome laiką. Tačiau vertėtų atkreipti dėmesį į brėžinius, vaizduojančius funkcijas, kurios neturi atvirkštinių.

Toliau pateikiamas griežtas atvirkštinės funkcijos apibrėžimas. Ką naujo jis sako? Jis tiesiog formalia kalba išreiškia tai, ką rodo skyrelio pradžioje pateikti brėžiniai. Todėl ir aiškinti jį geriausia pasitelkiant tą ar kitą panašų brėžinį.

Ar iš viso šis apibrėžimas reikalingas? Tikslumo šalininkai teigs kad taip, tačiau priekaištaus, kad jis vadovėlyje netaikomas, t. y. „nedirba“. Toks priekaištas, pavyzdžiui, pateikiamas dėl 1 pavyzdžio. Jame randama funkcijos $y = 2x + 1$ atvirkštinė funkcija $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$, tačiau apibrėžimas nenaudojamas siekiant įsitikinti, kad radome tai, ko ieškojome. Ką duotų toks formalus patikrinimas? Jeigu jau suvokiame, kad $x$ išreiškimas per $y$ yra „strėlių apgręžimas“, ką reiškia apibrėžimo tikrinimas? Jis nėra beprasmis, nes leidžia patikrinti, ar skaičiuodami nesuklydome. Tačiau, kai skaičiavimai yra tokie paprasti, kaip šiame pavyzdyje... Kaip ten bebūtų, naudosime šį apibrėžimą ar ne, liepti jį „iškalti“ tikrai nereikia.

Dėl pirmo pavyzdžio, taip pat ir dėl atvirkštinės funkcijos grafiko braižymo, kuris aptariamas šio skyriaus pabaigoje, pateikiama ir kitokių priekaištų (žr. polemiką žurnalo „Alfa plius omega“ 2002 metų 3 numeryje). Tvirtinama, kad daroma klaida, kai radus atvirkštinę funkciją $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ nepriklausomo kintamojo žymuo $y$ keičiamas žymeniu $x$. Galima sutikti, kad tai gali atrodyti tarsi koks formalus fokusas ir apsunkinti atvirkštinės funkcijos suvokimą. Tokio žymenų keitimo vietomis gal ir nevertėtų daryti, jeigu nenorėtume funkcijos ir jai atvirkštinės funkcijos grafikų braižyti toje pačioje koordinačių sistemoje. Ar norime pamatyti, kaip atrodo funkcijos, atvirkštinės duotajai grafikas? Patariama tiesiog pasukti brėžinį su funkcijos grafiku prieš laikrodžio rodyklę 90 laipsnių kampu, ir pamatysime. Visa tai tiesa. Tačiau tai, ką gausime, vėl gali kelti klausimų dėl neįprastos koordinačių ašių orientacijos.

Vis dėlto braižyti funkcijos ir jai atvirkštinės funkcijos grafikus toje pačioje koordinačių sistemoje tenka. Nepaaiškinus, kaip jie išsidėstę vienas kito atžvilgiu, būtų sunkiau paaiškinti, pavyzdžiui, simetrišką laipsninių funkcijų su racionaliaisiais laipsnių rodikliais grafikų šeimos išsidėstymą.

Aiškinti formalų grafikų taškų simetriškumą tiesės $y = x$ atžvilgiu gal ir nebūtina. Matyt, pakaktų ir skaitinio pavyzdžio, tarkime, su 1 pavyzdyje išnagrinėtomis funkcijomis, apibendrinant: „tai teisinga ir kitoms funkcijoms...“.

***Suvokiame*** atvirkštinės funkcijos sąvokos esmę.

***Mokame:***

rasti formule užrašytos funkcijos atvirkštinę funkciją;
remiantis funkcijos grafiku nubrėžti jai atvirkštinės funkcijos (kai ji egzistuoja) grafiką.

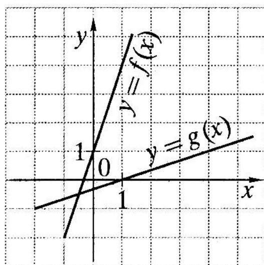
## PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

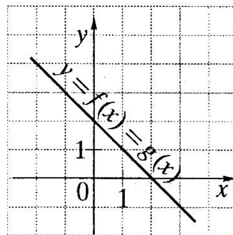
Skyrelio pirmame pratime reikalaujama nustatyti, ar dvi duotos funkcijos yra viena kitai atvirkštinės. Galima šiek tiek palengvinti užduotį, klausiant, pavyzdžiui, ar funkcijos $y = -x^3$ ir $x = -\sqrt[3]{y}$ yra viena kitai atvirkštinės, užuot klausus, ar funkcijos $f(x) = -x^3$ ir $g(x) = -\sqrt[3]{x}$ yra viena kitai atvirkštinės.

Atvirkštinės funkcijos sąvokai įtvirtinti svarbus 9 pratimas. Verta skirti jam daugiau dėmesio. Po to galima išspręsti kelis 30 pratimo punktus.

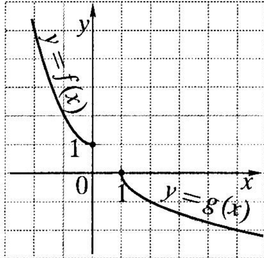
**26.** Visas nurodytas poras sudaro viena kitai atvirkštinės funkcijos.
Pavyzdžiui, a) punktą galima nagrinėti taip:
$f(x) = -x^3$, $y = -x^3$, $x^3 = -y$, $x = \sqrt[3]{-y} = -\sqrt[3]{y}$.
Funkcija $x = -\sqrt[3]{y}$ yra atvirkštinė funkcijai $y = -x^3$; $f(y) = -\sqrt[3]{y}$ yra atvirkštinė funkcijai $f(x) = -x^3$; $g(x) = -\sqrt[3]{x}$ yra atvirkštinė funkcijai $f(x) = -x^3$.

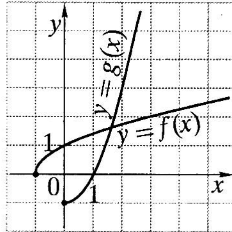
**27.** a) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = \frac{x-1}{3}$; b) $f(x) = 2 - x$, $g(x) = 2 - x$;



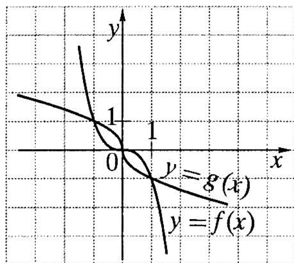



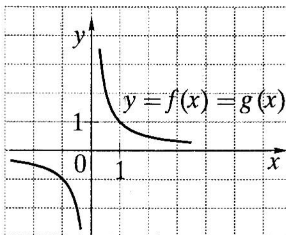

c) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -\sqrt{x-1}$; d) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2 - 1$;




e) $f(x) = -x^3$, $g(x) = -\sqrt[3]{x}$; f) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

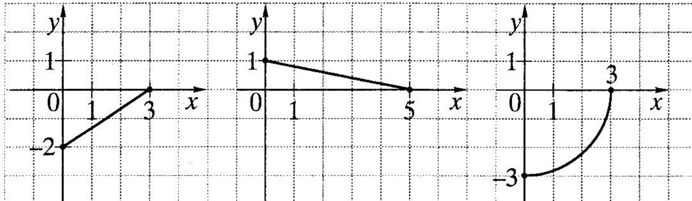


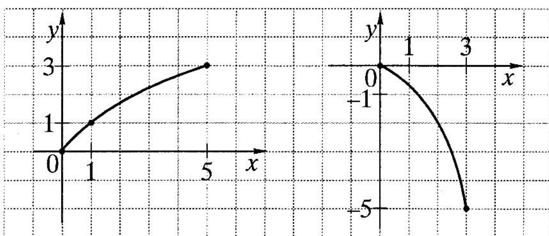




**28.** a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$, $f(x) = (x-3)^2$, $y = (x-3)^2$, $|x-3| = \sqrt{y}$. Kadangi $x \leqslant 3$, tai $x - 3 \leqslant 0$, taigi $-(x-3) = \sqrt{y}$, $x = 3 - \sqrt{y}$. Radome atvirkštinę funkciją, kurią galima užrašyti ir taip: $g(x) = 3 - \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$.

b) $f(x) = x^2 - 8x + 16$, $f(x) = (x-4)^2$; funkcijos $f(x)$ atvirkštinė yra $g(x) = \sqrt{x} + 4$.

**29.** a) Visos funkcijos, išskyrus $y = t(x)$, turi atvirkštines.




b) $D_f = [-2; 0]$, $E_f = [0; 3]$; $D_g = [0; 1]$, $E_g = [0; 5]$; $D_h = [-3; 0]$, $E_h = [0; 3]$; $D_v = [0; 3]$, $E_v = [0; 5]$; $D_s = [-5; 0]$, $E_s = [0; 3]$; $D_t = [-\pi; \pi]$, $E_t = [-1; 1]$.
Funkcijų $f$, $g$, $h$, $v$, $s$ atvirkštinės apibrėžtos aibėse $E_f$, $E_g$, $E_h$, $E_v$, $E_s$: jų reikšmių sritys yra $D_f$, $D_g$, $D_h$, $D_v$, $D_s$.

**30.** Funkcijos $f(x)$ atvirkštinę žymėkime $g(x)$. Tada $D_g = E_f$, $E_g = D_f$.

a) $g(x) = \frac{x+1}{2}$; $D_f = \boldsymbol{R}$, $E_f = \boldsymbol{R}$; b) $g(x) = \frac{1+x}{x}$; $D_f = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, $E_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

c) $g(x) = \sqrt{x-4}$; $D_f = [0; +\infty)$, $E_f = [4; +\infty)$; d) $g(x) = -\sqrt{-x-4}$; $D_f = (-\infty; 0]$, $E_f = (-\infty; -4]$;

e) $g(x) = x^2$; $D_f = [0; +\infty)$, $E_f = (-\infty; 0]$; f) $g(x) = x^{\frac{3}{7}}$; $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = (0; +\infty)$;

g) $g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$; $D_f = \boldsymbol{R}$, $E_f = \boldsymbol{R}$; h) $g(x) = \frac{3+4x}{x}$; $D_f = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$, $E_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

## 10.3. Didėjančios ir mažėjančios funkcijos

Šio skyrelio teorinė medžiaga yra nesudėtinga. Atpažinti didėjančias ir mažėjančias funkcijas iš grafikų sugebės kiekvienas, turintis grafikų „skaitymo“ įgūdžių. Pateiktas apibrėžimas tik formalizuoja tai, kas intuityviai gerai suprantama. Tačiau galbūt verta paminėti keletą argumentų dėl naudojamos terminologijos. Kaip geriau sakyti — „funkcija didėja“ ar „funkcija didėjanti“? Juk formalios logikos požiūriu, tai, kas pastovu (taisyklė), negali didėti. Vadovėlio autoriai laikėsi nuomonės, kad abu terminai geri. Neįmanoma (ir nereikia) taip išgryninti kalbą, kad formalios logikos požiūriu negalėtume prikibti. Sakome, kad „vėjas pučia“, nors tai tėra oro srovių judesiai, „laikas bėga“, nors niekas to nematė... Tiek posakis „funkcija didėja“, tiek „funkcija didėjanti“ vienodai gerai pažadina teisingą vidinį vaizdinį, kurį formalizuoja matematinis apibrėžimas.
Tiesa, šio skyrelio tekstui galima pasakyti pelnytų priekaištų dėl termino „didėjimo intervalas“ (taip pat ir „mažėjimo intervalas“) naudojimo. Mat didėjimo intervalais pavadinti tik atvirieji intervalai. Manyta, kad tai geriau derinsis su skaičių tiesės skaidymu intervalais XII klasėje tyrinėjant funkcijas. Tačiau, matyt, jokios painiavos neatsirastų, jeigu didėjimo bei mažėjimo intervalais pavadintume ir uždaruosius intervalus. Dabar vadovėlyje elgiamasi taip: nors sakoma, kad funkcija didėja uždarame intervale, bet šio intervalo didėjimo intervalu pavadinti vengiama.

***Žinome:***
didėjančios ir mažėjančios funkcijų apibrėžimus;
ryšį su atvirkštinėmis funkcijomis.

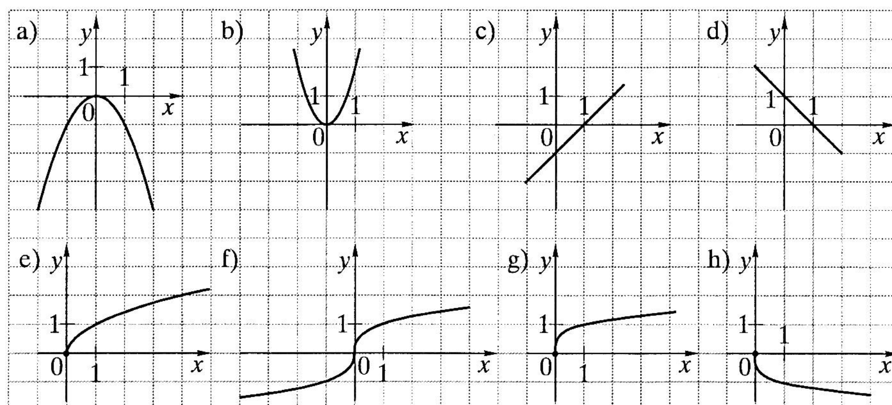
***Mokame:***
pasakyti iš grafiko, ar funkcija yra didėjanti, ar mažėjanti;
nustatyti didėjimo bei mažėjimo intervalus.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelio uždaviniai skirti priminti jau žinomas funkcijas ir jų grafikus (31, 32); sprendžiant lygtis ar nelygybes nustatyti, su kuriomis nepriklausomojo kintamojo reikšmėmis funkcija įgyja teigiamas, neigiamas ir pan. reikšmes (34–37); yra kartojimui skirtų pratimų. Kiek ir kuriuos uždavinius spręsti — geriausiai nuspręs pats mokytojas.

**31.** a) ir d) — didėjančios, b) ir c) — mažėjančios.

**32.**




| Funkcija | Didėjimo intervalai | Mažėjimo intervalai |
|---|---|---|
| a) $f(x) = -x^2$ | $(-\infty; 0)$ | $(0; +\infty)$ |
| b) $f(x) = 2x^2$ | $(0; +\infty)$ | $(-\infty; 0)$ |
| c) $f(x) = x - 1$ | $(-\infty; +\infty)$ | — |
| d) $f(x) = 1 - x$ | — | $(-\infty; +\infty)$ |
| e) $f(x) = \sqrt{x}$ | $[0; +\infty)$ | — |
| f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ | $(-\infty; +\infty)$ | — |
| g) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ | $[0; +\infty)$ | — |
| h) $f(x) = -\sqrt[4]{x}$ | — | $[0; +\infty)$ |

**34.** a) 7,5; b) 0; 3; c) $h(x) \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$; d) $-2$; 3; e) $-5$; f) 8.

35.

| $f(x)$ | $f(x)=0$ | $f(x)>0$ | $f(x)<0$ |
|---|---|---|---|
| a) $f(x)=10x+28$ | $-2{,}8$ | $x>-2{,}8$ | $x<-2{,}8$ |
| b) $f(x)=-15x+7$ | $\frac{7}{15}$ | $\left(-\infty;\ \frac{7}{15}\right)$ | $\left(\frac{7}{15};\ +\infty\right)$ |
| c) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ | 1 | $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$ | $(-1;\ 1)$ |
| d) $f(x)=\frac{x^2+x+4}{2x-1}$ | $f(x)\neq 0,\ x\neq\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ | $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right)$ |
| e) $f(x)=\lvert x\rvert-1$ | $-1$ ir 1 | $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$ | $(-1;\ 1)$ |
| f) $f(x)=\lvert x+1\rvert-3$ | $-4$ ir 2 | $(-\infty;\ -4)\cup(2;\ +\infty)$ | $(-4;\ 2)$ |

**36.** a) $f(3)=f(-3)$; b) $f(3)>f(-3)$; c) $f(3)<f(-3)$.

**37.** Tik teigiamas reikšmes įgyja b) punkto funkcija, tik neigiamas — d) ir e) punktų funkcijos. Punktų a) ir f) funkcijos įgyja neneigiamas reikšmes.

**38.** Funkcijos grafikas kerta $Oy$ ašį, nes $f(0)=\frac{1}{0^2+1}=1$, o $Ox$ ašies nekerta, nes $f(x)\neq 0$ su visomis $x$ reikšmėmis. Funkcija įgyja tik teigiamas reikšmes, todėl jos grafikas yra I ir II ketvirčiuose.

**39.** B.

**40.** B.

**41.** a) $f(t)=(20-2t)$ cm.
b) $D_f=[0;\ 10]$, $E_f=[0;\ 20]$. *Pastaba.* Jeigu nebūtų pasakyta, kad funkcija $f(x)$ išreiškia žvakės ilgį, galėtume manyti, kad $D_f=(-\infty;\ +\infty)$, $E_f=(-\infty;\ +\infty)$;
c) $g(l)=10-\frac{l}{2}$;
d) $D_g=[0;\ 20]$, $E_g=[0;\ 10]$.

**42.** $f(v)=\frac{v_0-v}{g}$.

# 11. LAIPSNINĖ FUNKCIJA

Prieš pradedant skyrių galima priminti, kas yra skaičiaus laipsnis su sveikuoju, racionaliuoju rodikliu, kai kurias laipsnių savybes, taip pat — šaknies sąvoką.

## 11.1. Laipsninė funkcija su sveikuoju rodikliu

Geriausia pradėti nuo to, kas jau žinoma. Šiuo atveju tie žinomi, gal net ir pabodę dalykai — funkcijų $y = x$, $y = x^2$ ir $y = x^3$ grafikai. Pradėkime nuo gerai visiems žinomos parabolės. Ji eina per taškus (0; 0) ir (1; 1). Bet parabolė ne tiesė — žinodami du taškus jos nenubrėšime. Reikia daugiau taškų. Ar reikia imti ir neigiamas, ir teigiamas $x$ reikšmes? Visiems aišku, kad pakanka imti tik teigiamas reikšmes, nes $(-x)^2 = x^2$. Todėl apskaičiavus vieną kvadratinės funkcijos reikšmę galima atidėti du grafiko taškus. Taigi $y = x^2$ yra funkcijų, kurių grafikai išsidėstę simetriškai tiesės $Oy$ atžvilgiu, šeimos narė. Nubraižykime dar kurios nors šios šeimos narės grafiką. Kaip šias funkcijas nusakyti (t. y. apibrėžti) nesiremiant geometrine simetrijos sąvoka? Suformuluokime lyginės funkcijos apibrėžimą.

Kai kas sako, kad vadovėlyje pateiktas apibrėžimas nėra tikslus, nes nepaminėta, kad su visais $x$ iš apibrėžimo srities ir $-x$ turi priklausyti apibrėžimo sričiai. Kažin ar tai rimtas trūkumas. Juk visiškai formaliai žvelgiant, jei jau reikalaujama, kad lygybė $f(x) = f(-x)$ būtų teisinga, tai kartu reikalaujama, kad $-x$ priklausytų funkcijos apibrėžimo sričiai.

Aptarę kvadratinę funkciją ir lyginės funkcijos sąvoką, galima nubraižyti ir kitų lyginio natūraliojo rodiklio laipsninių funkcijų grafikus. Galima paminėti, kad visi grafikai tarsi „surišti" trijuose taškuose: (−1; 1), (0; 0) ir (1; 1).

Nubraižykime kubinės parabolės grafiką. Vėl pastebėkime, kad braižant užtenka skaičiuoti funkcijos reikšmes su teigiamomis $x$ reikšmėmis. Tačiau šįkart naudojamės kitos rūšies simetrija — simetrija taško atžvilgiu.

Aptarkime nelyginės funkcijos sąvoką, nubraižykime laipsninių funkcijų su nelyginiais natūraliaisiais rodikliais grafikų puokštę; ji irgi „surišta" trijuose taškuose (−1; −1), (0; 0) ir (1; 1).

Vadovėlyje pateiktas algebrinis, t. y. skaičių savybėmis paremtas įrodymas, kad teigiamų kintamojo reikšmių srityje visos laipsninės funkcijos yra didėjančios. Galime šį formalų įrodymą praleisti, tačiau galima paaiškinti: braižėme grafikus tartum žinotume, kad funkcijos yra didėjančios. Iš kur mes tai žinome, juk visų funkcijos reikšmių neapskaičiavome? Tai galima įrodyti, remiantis skaičių savybėmis...

Kaip paaiškinti laipsninių funkcijų su neigiamais sveikaisiais rodikliais braižymą? Galima samprotauti nusibraižius atitinkamos laipsninės funkcijos su teigiamu sveikuoju rodikliu grafiką. Pavyzdžiui, nusibrėžkime tiesę $y = x$ ir samprotaukime, kaip braižyti funkcijos $y = \frac{1}{x}$ grafiką. Taškas (1; 1) yra pirmosios funkcijos grafiko taškas, tada taškas $(1; \frac{1}{1}) = (1; 1)$ yra antrosios funkcijos grafiko taškas. Imkime pirmosios funkcijos grafiko tašką su $x > 1$, t. y. pasislinkime $Ox$ ašimi į dešinę. Taško ordinatė tapo didesnė už vienetą; o funkcijos $y = \frac{1}{x}$ ordinatė sumažėjo, tapo mažesnė už vienetą. O jeigu $x$ dar labiau padidintume? O jeigu imtume $x$ reikšmę, mažesnę už vienetą? Panašiai galima samprotauti braižydami ir $y = \frac{1}{x^2}$ grafiką.

***Žinome:***

su kuriomis kintamojo reikšmėmis apibrėžtos laipsninės funkcijos su sveikaisiais laipsnio rodikliais;

kokias reikšmes įgyja laipsninės funkcijos su sveikaisiais laipsnio rodikliais;

kuriuose intevaluose laipsninės funkcijos didėja, kuriuose — mažėja;

kurios funkcijos yra lyginės, kurios — nelyginės.

***Mokame:***

patikrinti, ar funkcija yra lyginė, ar nelyginė, ar neturi nei vienos iš šių savybių;

braižyti apytikslius laipsninių funkcijų grafikus;

paaiškinti, kaip išsidėstę dviejų laipsninių funkcijų grafikai vienas kito atžvilgiu (aukščiau, žemiau...).

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Vertėtų išspręsti keletą reikšmių palyginimo uždavinių (43, 45, 46); keletą pratimų apie lygines ir nelygines funkcijas (47–52). Žinioms apie laipsninių funkcijų grafikus įtvirtinti gerai tinka, pavyzdžiui, 53 uždavinys, kuriame iš grafikų reikia padaryti išvadas apie nelygybių sprendinius.

**43.** *Pastaba.* Šiame uždavinyje, taip pat ir 45, 46, skaičius lyginame remdamiesi laipsninės funkcijos monotoniškumu.
a) $3{,}2^3 < 3{,}7^3$; b) $2{,}7^6 < (-2{,}8)^6$; c) $(-3{,}7)^3 < (-3{,}2)^3$.

**44.** a) 6; b) −18; c) 84; d) 120.

**45.** a) $f(2{,}3) < f(3{,}2)$; b) $f(\frac{1}{3}) > f(\frac{1}{5})$; c) $f(-3) < f(-4)$;
d) $f(21) > f(-19)$.

**46.** a) $g(3{,}5) < g(5{,}3)$; b) $g(\frac{1}{7}) < g(\frac{1}{6})$; c) $g(-5) < g(-2)$; d) $g(19) > g(-21)$.

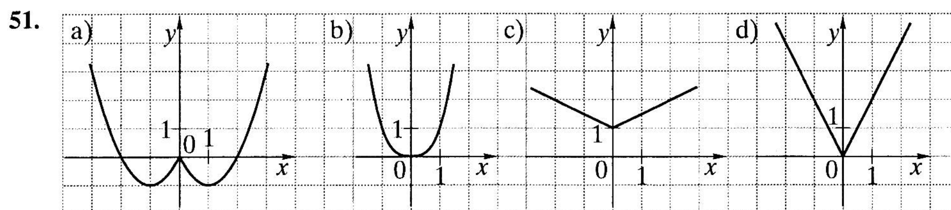
**47.** *Nurodymas.* Remkitės lyginės funkcijos apibrėžimu.

**48.** *Nurodymas.* Remkitės nelyginės funkcijos apibrėžimu.

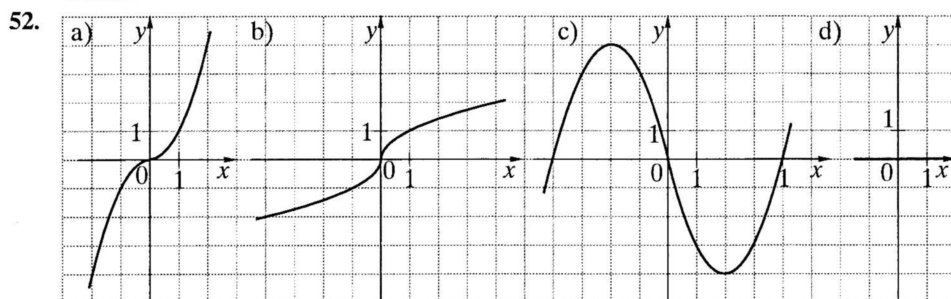
**49.** a), b), c), e) — funkcijos nėra nei lyginės, nei nelyginės; f) — lyginė, d) — nelyginė.

**50.** Kadangi:
a) $f(15) > f(7)$, tai $f(15) - f(7) > 0$;
b) $f(0) = 0$, $f(-3) < 0$, tai $f(0) + f(-3) < 0$;
c) $g(0) = 0$, tai $g(0) \cdot g(-60) = 0$;
d) $g(-9) > 0$, $f(-9) < 0$, tai $g(-9) \cdot f(-9) < 0$;
e) $f(-20) < 0$, tai $f(-20) + f(-20) < 0$;
f) $f(-4) < 0$, $g(-4) > 0$, bet $|f(-4)| < |g(-4)|$, tai $f(-4) + g(-4) > 0$.

**51.**




**52.**




**53.** (1) kreivė yra funkcijos $h(x) = x^4$ grafikas, (2) kreivė yra funkcijos $g(x) = x^3$ grafikas, (3) kreivė yra funkcijos $f(x) = x^2$ grafikas.
a) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; b) $x < -1$ ir $x > 1$; c) $x < 1$; d) $x > -1$;
e) $x = 0$, $x \geqslant 1$; f) $0 < x < 1$; g) $x \leqslant -1$, $x = 0$, $x \geqslant 1$;
h) $x < -1$, $x > 0$. *Pastaba.* Šiam punktui išspręsti, moksleiviai turėtų nusibraižyti funkcijų $h(x) = x^4$ ir $k(x) = -x^3$ grafikus.

**54.** a) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; b) $x = 3$; c) $x = 10$; d) $x_1 = -10$, $x_2 = 10$.

**55.** $n$ reikšmė, su kuria funkcijos $f(x) = x^n$ grafikas eina per nurodytą tašką, yra: a) 3; b) 3; c) 4; d) 2; e) 8; f) 4; g) reikšmės nėra; h) 5; i) 6.

**56.** Taškas $B(\sqrt{3}; 81)$ priklauso funkcijos $y = x^4$ grafikui: $(\sqrt{3})^4 = 81$;
taškas $C(-5; 25)$ priklauso funkcijos $y = x^2$ grafikui: $(-5)^2 = 25$;
taškas $F(3; 9)$ priklauso $y = x^2$ grafikui: $3^2 = 9$.

**57.** $A$ ir $D$.

**58.** Lygties sprendiniai: a) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$; b) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$;
nelygybės sprendiniai: a) $x \leqslant -3$, $0 < x \leqslant 3$; b) $-2 < x < 0$, $x > 2$.

**59.** Lygtį $x^4 - y^4 = 65$ užrašome taip: $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = 5 \cdot 13$. Kairėje lygybės pusėje yra trijų natūraliųjų skaičių sandauga, o dešinėje — dviejų pirminių. Taigi mažiausias kairės pusės daugiklis turi būti lygus 1, t. y. $x - y = 1$; kiti du — 5 ir 13. Gauname $x + y = 5$, $x^2 + y^2 = 13$, $x = 3$, $y = 2$. Lygtis turi vieną sprendinį natūraliaisiais skaičiais.

Priminkime: lyginio laipsnio šaknis galima traukti tik iš neneigiamų skaičių, o nelyginio — iš bet kokių. Taigi nagrinėjant funkcijas, kurios apibrėžiamos naudojant šaknis, prasminga lyginio ir nelyginio šaknies laipsnio atvejus panagrinėti atskirai.

Taigi — kvadratinės šaknies funkcija $y = \sqrt{x}$. Imkime reikšmes: $x = 0$; $\frac{1}{4}$; 1; 4, atidėkime taškus, nubrėžkime kreivę — apytikslį šaknies funkcijos grafiką. Galima atkreipti dėmesį, kuriuose taškuose kvadratinės šaknies funkcijos grafikas yra virš tiesės $y = x$, kuriuose taškuose žemiau šios tiesės.

Kad kvadratinės šaknies (ir lyginio laipsnio šaknies) funkcija yra atitinkamos laipsninės funkcijos, nagrinėjamos su neneigiamomis kintamojo reikšmėmis, atvirkštinė funkcija, aiškinama skyrelio pabaigoje. Tačiau jau ir nusibraižius kvadratinės šaknies funkcijos grafiką, galima prisiminti atvirkštinę funkciją.

Ar funkcija $y = \sqrt{x}$ turi atvirkštinę? Iš grafiko matyti, kad turi, juk ji yra didėjanti. Kokia šios funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis? Tai irgi matyti iš grafiko. Dabar suraskime funkcijos $y = \sqrt{x}$ atvirkštinę, t. y. išspręskime šią lygtį $x$ atžvilgiu. Gauname $x = y^2$ (imame tik neneigiamas $y$ reikšmes). Jei sukeisime kintamųjų žymenis, tai $y = x^2$ (imame tik neneigiamas $x$ reikšmes). Taigi funkcijos $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$ ir $y = \sqrt{x}$ yra viena kitai atvirkštinės.

Tačiau gali būti, kad tas „žongliravimas" kintamųjų žymenimis atrodys gana mįslingas. Galima apsiriboti tiesiog be didelių svarstymų nurodant parabolės šakos ir kvadratinės šaknies funkcijos grafiko tarpusavio išsidėstymo pobūdį: grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

Toliau galima tiesiog teigti: kitų lyginio laipsnio šaknų funkcijų grafikai panašūs į kvadratinės šaknies funkcijos grafiką. Tačiau kaip šaknų funkcijų grafikai išsidėstę vienas kito atžvigiu? Lyginkime kvadratinės ir ketvirtojo laipsnio šaknies funkcijų grafikus. Imkime, pavyzdžiui, šias kintamojo reikšmes: $x = 0$; $\frac{1}{16}$; 1; 16, suraskime kvadratinės ir ketvirtojo laipsnio šaknies reikšmes, atidėkime atitinkamus grafikų taškus (arba įsivaizduokime, kad atidedame) ir grafikų tarpusavio padėtis bus nustatyta.

Nelyginio laipsnio šaknų funkcijas, aišku, geriausia pradėti nagrinėti nuo kubinės šaknies. Žinoma, galima vėl atidėti kelis taškus, sujungti juos kreive. O galima pradėti ir nuo funkcijos $y = x^3$, t. y. nuo kubinės parabolės. Funkcija visur didėjanti, taigi atvirkštinė egzistuoja, ją nesunku rasti. Taigi funkcija $y = \sqrt[3]{x}$ yra funkcijos $y = x^3$ atvirkštinė. Norime įsivaizduoti, kaip atrodo funkcijos $y = \sqrt[3]{x}$ grafikas? Pasukime lapą, kuriame nubrėžta kubinė parabolė devyniasdešimties laipsnių kampu prieš laikrodžio rodyklę (kad $Oy$ ašis būtų horizontali). Jeigu pasuktame brėžinyje sukeistume ašių žymenis: ašį $Oy$ imtume žymėti $Ox$ ir atvirkščiai, ar gautume $y = \sqrt[3]{x}$ grafiką? Beveik, tačiau $Ox$ ašies kryptis neįprasta. O jei ir kryptį pakeistume? Kaip reiktų perbraižyti grafiką, kad jis būtų „tikras" kubinės šaknies funkcijos grafikas? Tikriausiai kas nors susiprotės, o gal ir kitiems paaiškins.

Žinoma, galima vien tik paminėti, kad funkcijų $y = x^3$ ir $y = \sqrt[3]{x}$ grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

Lieka paaiškinti, kaip atrodo aukštesnės eilės šaknų funkcijų grafikai.

***Žinome:***

kokiose aibėse apibrėžtos šaknų funkcijos;

šaknų funkcijų savybes;

šaknų funkcijų ryšį su laipsninėmis natūraliojo argumento funkcijomis.

***Mokame:***

braižyti šaknų funkcijų grafikus;

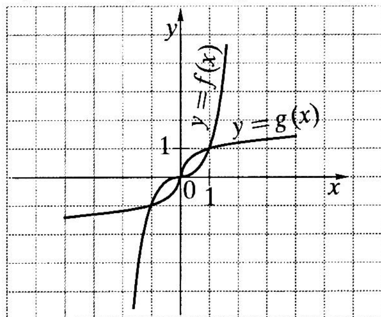
teisingai pavaizduoti šaknų funkcijų grafikų tarpusavio išsidėstymą.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

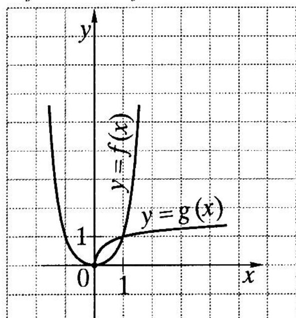
Dauguma šio skyrelio pratimų skirti ne tiek šaknų funkcijos sąvokai įtvirtinti, kiek apskritai veiksmų su šaknimis taisyklėms pakartoti. Iš pastarųjų verta atlikti po kelias 60, 62, 64 pratimų užduotis, reikėtų panagrinėti 61 ir 65 uždavinius... Ar yra laiko kitiems uždaviniams — geriausiai nuspręs patys mokytojai.

**60.** a) 2; b) −9; c) 10;
d) $\frac{\sqrt[3]{0.125}}{0.1^2} \cdot \sqrt{25} - (\sqrt{17} + \sqrt{2})(\sqrt{17} - \sqrt{2}) = 235$.

**61.** a) $D_f = \boldsymbol{R}$, $E_f = \boldsymbol{R}$; $D_g = \boldsymbol{R}$, $D_g = \boldsymbol{R}$;




b) $D_f = \boldsymbol{R}$, $E_f = [0; +\infty)$; $D_g = [0; +\infty)$, $E_g = [0; +\infty)$.




**62.** a) $x \geqslant 4$ ir $x \neq 5$; b) $x \leqslant 2$ ir $x \neq -1$; c) $x \geqslant 1$; d) $x \geqslant -21$;
e) $x \neq 0$; f) $x \geqslant -9$.

**63.** C.

**64.** a) $x + |x-6| - |2-x| = x + x - 6 + 2 - x = x - 4$;
b) $|y-5| - |5-y| - y = -y + 5 - 5 + y - y = -y$;
c) $y - 4 + 4 - y + 2y = 2y$;
d) $|6-x| + |7-x| + x = -6 + x - 7 + x + x = 3x - 13$.

**65.** a) $[0; 4]$; b) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; c) $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$.

**66.** a) Patogu pasinaudoti keitiniu: $\sqrt{\frac{x}{y}} = m$. Tada $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{m}$ ir antroji sistemos lygtis virsta tokia: $m + \frac{1}{m} = 2{,}5$; $m_1 = 2$ ir $m_2 = \frac{1}{2}$. Taigi turime: $\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$ arba $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}$; $x = 4y$ arba $x = \frac{1}{4}y$. Įrašę į pirmąją lygtį, gauname: $4y - y = 6$, $y = 2$, $x_1 = 8$; $\frac{1}{4}y - y = 6$, $y = -8$, $x_2 = -2$.
b) Sprendžiant šį pratimą taip pat geriausia pasinaudoti a) punkto keitiniu.
c) $\begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 10, \\ \sqrt{y}(\sqrt{y} + \sqrt{x}) = 6; \end{cases}$ $x \neq 0$ ir $y \neq 0$, tai galima pirmąją lygtį padalyti iš antrosios: $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{5}{3}$, tai $x = \frac{25}{9}y$. Tada iš pirmosios lygties atimame antrąją ir gauname: $x - y = 4$ ir $\frac{25}{9}y - y = 4$. Taigi $y = 2\frac{1}{4}$ ir $x = 6\frac{1}{4}$.
d) Sprendimas analogiškas c) punktui.
*Atsakymas.* a) $(8; 2)$, $(-2; -8)$; b) $(9; 1)$, $(-1; -9)$; c) $\left(6\frac{1}{4}; 2\frac{1}{4}\right)$; d) $(9; 1)$.

**67.** a) 5; b) $-1$; 3; c) 3;
d) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}$, $\frac{4x-4\sqrt{x^2+x}-x-\sqrt{x^2+x}}{x^2-(\sqrt{x^2+x})^2} = \frac{3}{x}$, $\frac{3x-5\sqrt{x^2+x}}{-x} = \frac{3}{x}$;
$x \neq 0$, tai $3x - 5\sqrt{x^2+x} = -3$.
Išsprendę lygtį gauname, kad $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{9}{16}$ (abu sprendiniai tinka).

**68.** Visuose pavyzdžiuose pirmiausiai reikėtų panaikinti iracionalumą vardikliuose.
a) 0; b) 0; c) $-4\sqrt{3}$; d) 0.

**69.** Pertvarkę gauname:
a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\sqrt{2}$; d) 1.

## 11.3. Laipsninė funkcija su racionaliuoju rodikliu

Žinome, kad laipsninių, taip pat ir šaknies funkcijų apibrėžimo sritys priklauso nuo laipsnio rodiklio (šaknies laipsnio). Pavyzdžiui, laipsninės funkcijos su neigiamais sveikaisiais rodikliais neapibrėžtos su $x = 0$, lyginio laipsnio šaknies funkcijos — su neigiamomis kintamojo reikšmėmis. O su kokiomis kintamojo reikšmėmis apibrėžtos visos laipsninės ir visos šaknų funkcijos? Atsakymas vienas — su teigiamomis nepriklausomo kintamojo reikšmėmis. Su teigiamomis kintamojo reikšmėmis galima nagrinėti ne tik šias funkcijas, bet ir funkcijas $y = x^r$, $r = \frac{m}{n}$, čia $r$ — bet koks racionalusis skaičius. Taigi ir nagrinėkime visas funkcijas „lygiomis teisėmis“.

Priminkime laipsnio racionaliuoju rodikliu apibrėžimą: $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$. Po to galima braižyti grafikų šeimą.

Nubraižykime spindulį $y = x^1$ $(x > 0)$; nubraižykime pusę parabolės $y = x^2$ $(x > 0)$. O kaip atrodys rodiklinės funkcijos su rodikliu $1 < r < 2$, pavyzdžiui, su $r = \frac{3}{2}$ grafikas? Įterpkime šios funkcijos grafiką tarp tiesės ir parabolės pusės. Parodykime, kaip atrodo dar keleto funkcijų grafikai. Galima pasiūlyti įsivaizduoti, kokią plokštumos dalį „uždengtų“ visų funkcijų $y = x^r (x > 0)$ grafikai su visais racionaliaisiais rodikliais $1 \leqslant r < +\infty$ — du kryžminius kampus, kuriuos sudaro tiesės $y = x$ ir $x = 1$.

Panašiai galima išnagrinėti ir funkcijų $y = x^r (x > 0)$ su racionaliaisiais rodikliais $0 \leqslant r < 1$ grafikų šeimą. Ir vėl tokie grafikai „uždengtų“ du kryžminius kampus.

Dabar galima atrasti, kad kiekviena funkcija $y = x^r$ $(r > 0)$ turi atvirkštinę funkciją $y = x^{\frac{1}{r}}$. Taigi laipsninių funkcijų šeimoje galima išskirti funkcijų poras, jų grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu. Funkcija $y = x$ yra pati sau atvirkštinė, taigi jos porininkė sutampa su ja pačia. Vienintelė funkcija, kuri savo savybėmis skiriasi nuo kitų, yra funkcija su nuliniu rodikliu, t. y. funkcija $y = x^0 = 1$. Ji nėra didėjanti, neturi atvirkštinės. Gal jos iš viso į nagrinėjamų funkcijų šeimą neįtraukti?

Panašiai galima išnagrinėti ir funkcijas su neigiamais racionaliaisiais rodikliais. Vėl galima nagrinėti atvejus $-1 < r < 0$ ir $-\infty < r < 1$. Tik šiuo atveju grafikai „uždengs“ ne dviem tiesėm apribotas sritis, bet sritis, apribotas tiese $x = 1$ ir hiperbole $y = \frac{1}{x}$.

***Žinome*** laipsninių funkcijų su racionaliaisiais rodikliais savybes (kurios funkcijos didėja, kurios mažėja, tarpusavyje atvirkštinių funkcijų poras).

***Mokame:***

nubraižyti laipsninių funkcijų su racionaliaisiais rodikliais grafikus;

paaiškinti, kaip tarpusavyje išsidėstę laipsninių funkcijų su racionaliaisiais rodikliais grafikai.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Atlikę kelias pirmųjų pratimų (70–72) užduotis, moksleiviai pakartos laipsnių su racionaliaisiais rodikliais veiksmų taisykles. Po to reikėtų pereiti prie laipsninių funkcijų ir jų grafikų, išspęsti 73, 76–78 uždavinius.

Kiti uždaviniai skirti iracionaliosioms lygtims, reiškinių pertvarkiams pakartoti. Ar juos spręsti klasėje, ar užduoti namuose, ar praleisti? Darbo eiga padiktuos geriausią sprendimą.

**70.** a) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{4^2}$, $3\sqrt{x}$, $\sqrt{3x}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4.3}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2y^2}}$, $\sqrt[5]{a+b}$;
c) $\frac{4a}{\sqrt[6]{a+4}}$, $\frac{x}{\sqrt[3]{y^2}}$, $\sqrt[5]{m} + \sqrt[5]{n}$; d) $\sqrt[5]{x}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{y^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{z^5}}$.

**71.** a) $(2x)^{\frac{1}{2}}$, $(3x^2)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{5}y\right)^{\frac{1}{5}}$, $(0{,}3m)^{\frac{1}{4}}$;
b) $(ab)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{m}} = m^{-\frac{1}{3}}$, $m^{-\frac{2}{3}}$, $(a+b)^{-\frac{1}{4}}$.

**72.** a) 7; b) 6; c) 9; d) 16.

**73.** *Pastaba.* Lygindami skaičius remkitės laipsninės funkcijos monotoniškumu.
a) $6{,}2^{\frac{1}{2}}$; b) $(0{,}5)^{-\frac{1}{2}}$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; d) $(1{,}3)^{-4}$; e) $3{,}5^{3-\pi}$; f) $2{,}8^{5-\pi}$.

**74.** a) $a = V^{\frac{1}{3}}$; b) $S = V^{\frac{2}{3}}$; c) $P = 6V^{\frac{2}{3}}$.

**75.** a) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{-3}}} : a^{-\frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{6}} : a^{-\frac{1}{6}} = 1$;
b) $\sqrt[4]{a^4\sqrt[4]{a^{-1}}} \cdot a^{\frac{5}{16}} = a^{\frac{15}{16}} \cdot a^{\frac{5}{16}} = a^{\frac{20}{16}} = a^{\frac{5}{4}}$;
c) $\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = \frac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$;
d) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$;
e) $(a^{1,8}+1)(a^{\frac{6}{5}}+a^{\frac{3}{5}}+1)(a^{0,6}-1) = (a^{1,8}+1)(a^{1,8}-1) = a^{3,6}-1$;
f) $(a^{\frac{7}{4}}-2)(a^{3,5}+2a^{1,75}+4)(8+a^{5,25}) = (a^{\frac{21}{4}}-8)\cdot(8+a^{5,25}) = a^{10,5}-64$.

**76.** a) $(-1;\ 1)$, $(1;\ 1)$; b) $(-1;\ 1)$, $(1;\ 1)$.

**77.** a) $g(x) = x^{\frac{6}{5}}$; b) $g(x) = x^{\frac{3}{5}}$; c) $g(x) = (x-2)^{\frac{4}{3}}$; d) $g(x) = (x-1)^{-\frac{3}{2}}$.

**78.** *Nurodymas.* Stipresnieji moksleiviai uždavinį gali spręsti sudarydami lygtį $f(x) = g(x)$, o silpnesnieji — braižydami funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus.

a) Abi lygties $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{2}{3}}$ puses pakelkime kubu: $x = x^2$. Iš čia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Sprendinys $x = 0$ netinka, nes su juo funkcija $y = g(x)$ neapibrėžta. Lieka $x = 1$. Tada $y = f(1) = 1$.

Analogiškai sprendžiamas ir b) punktas.

*Atsakymas.* a) $(1;\ 1)$; b) $(1;\ 1)$.

**79.** a) 27; b) 16; c) 512; d) 8; e) 8; f) 9; g) 5; h) 2; i) $\sqrt{3}$; j) 2; k) 3; l) 6.

*Pastaba.* Kadangi laipsniai $x^n$ su racionaliaisiais rodikliais apibrėžti tik teigiamiems $x$, visų lygčių sprendiniai yra teigiami skaičiai.

**80.** Reikia išspręsti lygtį $m$ atžvilgiu:

$m(1+\sqrt{3})^2 = -(1+\sqrt{3})^3 - 2(1+\sqrt{3}) + 4;$

$m = \frac{-8\sqrt{3}-8}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{-8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{-8(\sqrt{3}-1)}{3-1} = -4(\sqrt{3}-1) = 4 - 4\sqrt{3}.$

**81.** a) Sprendžiant lygtį patogu pakeisti nežinomąjį $\sqrt[3]{x} = m$. Tada:

$\frac{m^2+1}{m^2-1} + \frac{m-1}{m+1} = 2$, $m = 2$. Taigi $\sqrt[3]{x} = 2$, $x = 8$.

b) Sprendžiame lygtį: $\frac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}+1} + \frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}-1} = 7$. Pakeitę nežinomąjį $\sqrt[3]{x^2} = m$ ir pertvarkę lygtį gauname $m = 4$. Taigi $\sqrt[3]{x^2} = 4$, $x^2 = 64$, $x_1 = -8$, $x_2 = 8$.

**82.** a) $\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$; b) $\frac{2}{a+b}$;

c) $\frac{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-3}-b^{-3}} : \frac{(b-a)^{-1}}{(ab)^{-2}} = \frac{(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2})\cdot a^3b^3}{(a^{-3}-b^{-3})\cdot a^3b^3} : \frac{(ab)^2}{(b-a)^1} =$

$= \frac{ab^3+a^2b^2+a^3b}{b^3-a^3} \cdot \frac{b-a}{(ab)^2} = \frac{ab(b^2+ab+a^2)}{(b-a)(b^2+ab+a^2)} \cdot \frac{b-a}{(ab)^2} = \frac{1}{ab}$;

d) $\frac{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-3}+b^{-3}} : \left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-2} = \frac{(a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2})\cdot a^3b^3}{(a^{-3}+b^{-3})\cdot a^3b^3} : \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 =$

$= \frac{ab^3-a^2b^2+a^3b}{b^3+a^3} \cdot \left(\frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{ab(b^2-ab+a^2)}{(b+a)(b^2-ab+a^2)} \cdot \frac{(a+b)^2}{(ab)^2} = \frac{a+b}{ab}.$

*Pastaba.* Pratimų c) ir d) reiškiniuose yra laipsnių su neigiamais laipsnių rodikliais. Laipsnius su neigiamais rodikliais galima panaikinti, dauginant ir dalijant iš tam tikro to paties reiškinio.

# 12. RODIKLINĖ FUNKCIJA

Šiame skyriuje ne tik įvedama nauja funkcija, t. y. padidinamas žinomų funkcijų „arsenalas“, tačiau išsprendžiama ir kita problema: apibendrinama laipsnio sąvoka, parodoma, kad galima nagrinėti laipsnius ne tik su racionaliaisiais, bet ir iracionaliaisiais rodikliais.

## 12.1. Rodiklinės funkcijos sąvoka

Galima pradėti nuo laipsninės funkcijos, pavyzdžiui, nuo funkcijos $f(x) = x^2$. Kokius veiksmus turime atlikti, norėdami apskaičiuoti funkcijos reikšmę? Tik vieną daugybos veiksmą. O jeigu pabandytume laipsnio rodiklį ir pagrindą sukeisti vietomis, t. y. nagrinėti funkciją $g(x) = 2^x$? Padėtis labai pasikeičia. Apskaičiuoti funkcijos reikšmę nebėra taip paprasta. Pavyzdžiui, su $x = 5$ jau reikia atlikti penkis daugybos veiksmus (kas nors galbūt pastebės, kad užtenka trijų). O norint apskaičiuoti funkcijos reikšmę su $x = \frac{1}{2}$ reikia ne dauginti, bet traukti šaknį. Kita vertus, ar galima funkciją $g(x) = 2^x$ nagrinėti ir su iracionaliaisiais $x$, mes dar nežinome. Taigi reiškinys, gautas sukeitus laipsnio rodiklį ir pagrindą vietomis, sukelia daug problemų.
Galima apskaičiuoti tokios funkcijos reikšmes su visomis sveikosiomis $x$ reikšmėmis, po to su visomis reikšmėmis $x = \frac{m}{2}$ (kad apskaičiuotume šias reikšmes turime traukti kvadratines šaknis), po to su $x = \frac{m}{4}$ ir t. t. Pasiūlykime įsivaizduoti, kad taškų vis daugėja, jie vis „tankiau“ išsidėstę, tačiau jie vistiek yra „atskirti“ vienas nuo kito... Pasiūlykime įsivaizduoti, kaip juos „sujungiame“ ir gauname plokštumos kreivę. Yra tik vienas būdas sujungti taškus, gautoji kreivė yra funkcijos $g(x) = 2^x$ grafikas. Kadangi šios funkcijos nepriklausomas kintamasis yra laipsnio rodiklis, ją vadiname rodikline.
Taigi naują funkciją apibrėžėme naudodamiesi grafiku. Tačiau iš tiesų tas grafikas yra tik „vaizdinė priemonė“. Skyriaus tekstu bandoma sukurti intuityvų suvokimą, kad rodiklinė funkcija apibrėžiama remiantis ribomis, nors riba niekur ir nepaminima.
Apibrėždami funkciją $g(x) = 2^x$ kartu apibrėžiame visus dvejeto laipsnius, taigi suteikiame prasmę ir tokiems reiškiniams, kaip pavyzdžiui $2^{\sqrt{5}}$... Apibrėžę funkcijas $g(x) = a^x$ su $a > 0$, mes kartu apibrėžėme ir visų teigiamųjų skaičių laipsnius su visais realiaisiais rodikliais. Pasirodo, kad veiksmų su laipsniais taisyklės ir tuo atveju, kai rodikliai gali būti bet kokie, yra tos pačios, kaip ir racionaliųjų laipsnio rodiklių atveju. Žinoma, tų taisyklių mes neįrodinėjame, tačiau galima pabandyti paaiškinti, kodėl tos taisyklės tos pačios.
Iš tiesų, norint kuo tiksliau apskaičiuoti, pavyzdžiui, $2^{\sqrt{5}}$, galima imti racionaliuosius skaičius $r$ vis artimesnius $\sqrt{5}$ ir skaičiuoti $2^r$. Norint apskaičiuoti $2^{\sqrt{7}}$, galima imti racionaliuosius skaičius $s$ vis artimesnius $\sqrt{7}$ ir skaičiuoti $2^s$. Kadangi $r$ ir $s$ yra racionalieji, tai

$$2^r \cdot 2^s = 2^{r+s}.$$

Imdami skaičius $r, s$ vis artimesnius $2^{\sqrt{5}}, 2^{\sqrt{7}}$ mes „išsaugome“ lygybę ir laipsniams su iracionaliaisiais rodikliais:

$$2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{\sqrt{7}} = 2^{\sqrt{5}+\sqrt{7}}.$$

Gal būt kas nors paklaus: kokia mums nauda iš, pavyzdžiui, tokio skaičiaus: $\sqrt{5}^{\sqrt{7}}$, juk vis viena jo reikšmės mes surasti negalime?
Tai tiesa, tačiau yra daug skaičių, kurių tikslios reikšmės mes nežinome, tačiau nuolat juos naudojame. Pavyzdžiui, skaičius $\pi$, arba $\sqrt{2}$. Tai ir yra vienas iš matematikos jėgos požymių, kad ji sugeba pateikti teisingus rezultatus apie tam tikrus objektus, kurie taip ir lieka iki galo neįminti, paslaptingi, kaip skaičius $\pi$.

***Žinome ir suvokiame:***
kaip apibrėžiama rodiklinė funkcija;
rodiklinės funkcijos savybes;
laipsnio bet kokiu realiuoju rodikliu „atsiradimo“ būdą;
kaip apytiksliai apskaičiuoti laipsnio su iracionaliuoju rodikliu reikšmę.

***Mokame*** pasinaudoti laipsnių savybėmis pertvarkant reiškinius.

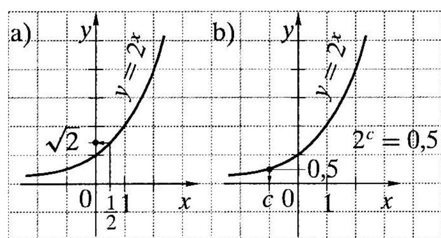
### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelio uždavinių rinkinį sudaro tarsi dvi dalys. Pirmosios dalies uždaviniai (83–96) yra svarbiausi, jie skirti rodiklinės funkcijos sąvokai, savybėms. Reikėtų išspręsti daugumą šios dalies uždavinių. Iš kitos dalies uždavinių galima rinktis pagal poreikius ir skonį.

**83.** a) $f(-3) = 125$, $f(-1) = \frac{1}{5}$, $f(0) = 1$, $f(2-a) = 5^{8-4a+a^2}$;

b) $f(-2) = 65\,536$, $f(-1) = 64$, $f(0) = 1$, $f(a-2) = \left(\frac{1}{4}\right)^{6a-a^2-8}$.

**84.** a) *Nurodymas.* Skaičius pirmiausiai užrašykite kaip laipsnius pagrindu 2:
$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}} = 2^{-\frac{3}{2}}$.




**85.** *Nurodymas.* Uždavinys analogiškas 84-ajam. Spręsdami punktą a), skaičius užrašykite kaip laipsnius pagrindu $\frac{1}{3}$: $\sqrt[5]{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$, $3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1,5} = 3^{1,5}$.

**86.** Funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai yra simetriški $Oy$ ašies atžvilgiu tada ir tik tada, kai $f(-x) = g(x)$. Šią lygybę nesunku patikrinti:
a) $f(-x) = 5^{-x} = \frac{1}{5^x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x = g(x)$;
b) $f(-x) = 0{,}5^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x = g(x)$.

**87.** *Nurodymas.* Stipresnieji moksleiviai uždavinį gali spręsti sudarydami lygtį $f(x) = g(x)$, o silpnesnieji — braižydami funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus.
a) $2^x = 8$, $x = 3$, $y = 8$; b) $3^x = \frac{1}{3}$, $x = -1$, $y = \frac{1}{3}$;
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$, $x = -2$, $y = 9$; d) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{16}$, $x = 2$, $y = \frac{1}{16}$.
*Atsakymas.* a) (3; 8); b) $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$; c) (−2; 9); d) $\left(2; \frac{1}{16}\right)$.

**88.** a) −1; b) 2; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{3}$.

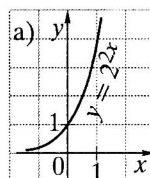
**89.** a) $f(x) = 0{,}3^{-x} = \left(\frac{10}{3}\right)^x$. Kadangi $\frac{10}{3} > 1$, tai funkcija $f(x)$ yra didėjanti;
b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = 5^x$. Kadangi $5 > 1$, tai funkcija $f(x)$ yra didėjanti;
c) $f(x) = 2{,}4^{-2x} = \left(\frac{1}{2{,}4}\right)^{2x}$. Kadangi $\frac{1}{2{,}4} < 1$, tai funkcija $f(x)$ yra mažėjanti;
d) $f(x) = 0{,}2^{-3x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3x} = 5^{3x}$. Kadangi $5 > 1$, tai funkcija $f(x)$ yra didėjanti.

**90.** a) Kadangi $\left(\frac{2}{7}\right) < 1$, tai $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ yra mažėjanti funkcija. Kadangi $2{,}6 < 2{,}7$, tai $\left(\frac{2}{7}\right)^{2,6} > \left(\frac{2}{7}\right)^{2,7}$;
b) kadangi $\left(\frac{5}{3}\right) > 1$, tai $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ yra didėjanti funkcija. Kadangi $1{,}2 > 1{,}1$, tai $\left(\frac{5}{3}\right)^{1,2} > \left(\frac{5}{3}\right)^{1,1}$.

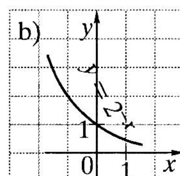
**91.** a) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{3}}$;
b) $1+\sqrt{6} < \sqrt{2}+\sqrt{5}$, nes $(1+\sqrt{6})^2 = 7+2\sqrt{6}$ ir $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2 = 7+2\sqrt{10}$; kadangi $\frac{2}{5} < 1$, tai $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}} > \left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;
c) $1+\sqrt{3} > 2$, $\frac{\pi}{6} < 1$, tai $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1+\sqrt{3}} < \left(\frac{\pi}{6}\right)^2$;
d) $\sqrt{2}-\sqrt{5} < \sqrt{5}-\sqrt{2}$ ir $\sqrt{6} > 1$, tai $(\sqrt{6})^{\sqrt{2}-\sqrt{5}} < (\sqrt{6})^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

**92.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$, $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} > 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}} > 1$, $\pi^{-\frac{2}{5}} < 1$, $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}} < 1$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} < 1$.

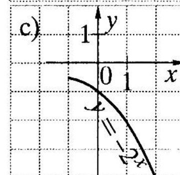
**93.** a) $f(x) = 2^{2x}$, $D_f = \boldsymbol{R}$, $E_f = (0; +\infty)$, $f(x)$ — didėjanti funkcija;



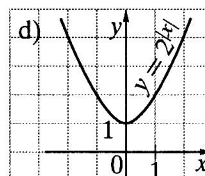

b) $y = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$, $D = \boldsymbol{R}$, $E = (0; +\infty)$, $y = 2^{-x}$ — mažėjanti funkcija;



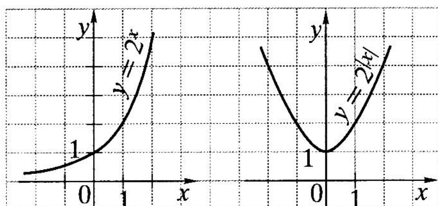

c) $y = -2^x$, $D = \boldsymbol{R}$, $E = (-\infty; 0)$, $y = -2^x$ — mažėjanti funkcija;



d) $y = 2^{|x|}$, $D = \boldsymbol{R}$, $E = [1; +\infty)$, $y = 2^{|x|}$ didėja, kai $x > 0$ ir mažėja, kai $x < 0$; funkcija lyginė.

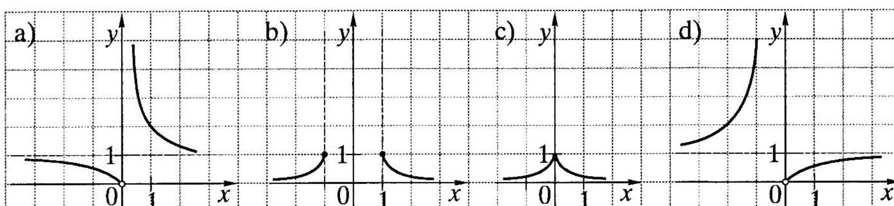



**94.** *Patarimas.* Nusibraižykite duotų funkcijų grafikus.



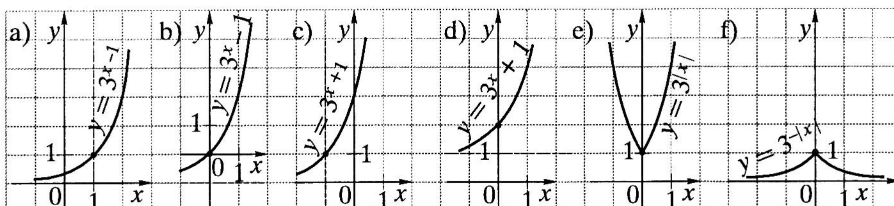

a) Funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ neįgija didžiausios reikšmės;
b) funkcija $f(x)$ neįgija mažiausios reikšmės, o funkcija $g(x)$ įgyja mažiausią reikšmę, lygią 1.

**95.** *Patarimas.* Nusibraižykite duotų funkcijų grafikus.




a) $y = 2^{\frac{1}{x}}$, $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E = (0; 1) \cup (1; +\infty)$;
b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-1}}$, $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, $E = (0; 1]$;
c) $y = \frac{1}{5^{x^2}}$, $D = (-\infty; +\infty)$, $E = (0; 1]$;
d) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$, $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E = (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

**96.**



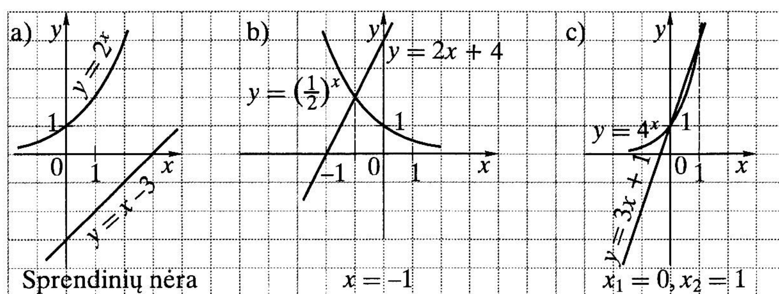

**97.** a) $(3^2)^2 - \left((-2)^3\right)^2 - \left(-5^2\right)^2 = 81 - 64 - 625 = -608$;
b) $4^{-2} - 2^{-3} + (-2^3)^{-1} = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{16}$;
c) $\frac{2\cdot3^{20}-5\cdot3^{19}}{(-9)^9} = \frac{3^{19}\cdot(2\cdot3-5)}{-3^{18}} = -3$;
d) $\frac{3^{15}+3^{14}}{3^{14}+3^{13}} \cdot \frac{(-2)^9}{1024} = \frac{3^{14}(3+1)}{3^{13}(3+1)} \cdot \frac{(-2)^9}{2^{10}} = -1\frac{1}{2}$;
e) $(4^{-1})^4 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 \cdot (8^{-2})^5 \cdot (64^2)^3 = 2^{-8} \cdot 2^5 \cdot 2^{-12} \cdot 2^{-30} \cdot 2^{36} = 2^{-9} = \frac{1}{512}$;
f) $\left(5^{\sqrt{24}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{6}}} - \left(9^{\sqrt{18}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 5^2 - 9^3 = -704$;
g) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (0{,}25)^2 \cdot \left((-5)^{-3}\right) \cdot (0{,}1^2)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot (-5)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} =$ $-5^3 \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot (-5)^{-3} \cdot 2^4 \cdot 5^4 = 5^4 \cdot 2^{-3} = 78{,}125$;
h) $\frac{\left(3^{\sqrt{42}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{6}}}}{3^{\sqrt{7}}} + \left(\frac{7^{\sqrt{27}}}{4^{\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{3}} = \frac{3^{\sqrt{7}}}{3^{\sqrt{7}}} + \frac{7^9}{4^3} = 1 + \frac{40\,353\,607}{64} = 630526\frac{7}{64}$.

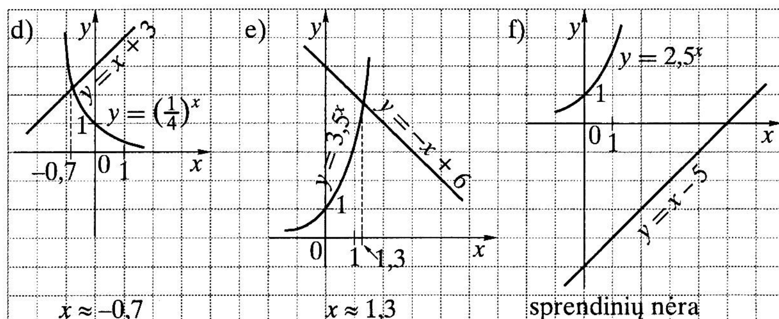
**98.** a) $5^5 - 5^4 + 5^3 = 5^3 \cdot (5^2 - 5 + 1) = 5^3 \cdot 21 = 5^3 \cdot 3 \cdot 7$ — dalijasi iš 7.
b) Pertvarkome sandaugą taip, kad atsirastų daugiklis $75^{30} = 15^{30} \cdot 5^{30}$. $45^{45} \cdot 15^{15} = 3^{45} \cdot 15^{45} \cdot 15^{15} = 3^{45} \cdot 15^{30} \cdot 15^{30} = 3^{45} \cdot 15^{30} \cdot 3^{30} \cdot 5^{30} =$ $75^{30} \cdot 3^{75}$. Sandauga dalijasi iš $75^{30}$;
c) $10^9+10^8+10^7 = 10^7\cdot(10^2+10+1) = 10^7\cdot111 = 2^7\cdot5^7\cdot111 = 2^7\cdot5^6\cdot555$ — dalijasi iš 555;
d) $81^7-27^9-9^{13} = 3^{28}-3^{27}-3^{26} = 3^{26}\cdot(3^2-3-1) = 3^{26}\cdot5 = 3^{24}\cdot3^2\cdot5 =$ $3^{24}\cdot45$ — dalijasi iš 45.

**99.** a) $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n(3^2+1) - 2^n(2^2+1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$ — dalijasi iš 10;
b) $3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} = 3^{n+1}(3^2+1) + 2^{n+2}(2+1) = 3^n \cdot 3 \cdot 10 + 2^{n+1} \cdot 2 \cdot 3 = 6 \cdot (3^n \cdot 5 + 2^{n+1})$ — dalijasi iš 6.

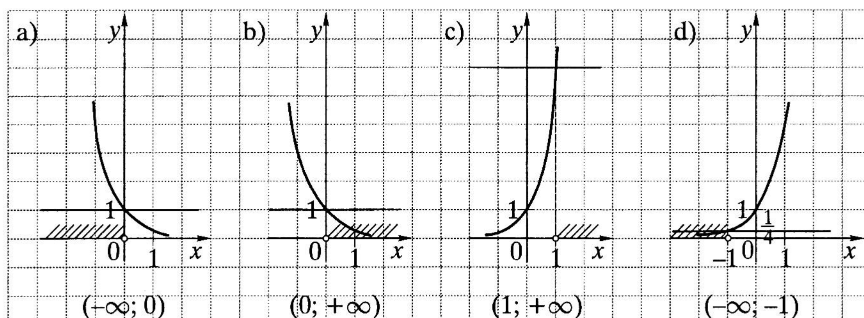
**100.** a) $x_1 > 0$; b) $x_1 < 0$; c) $x_1 > 0$; d) $x_1 < 0$; e) $x_1 > 0$; f) $x_1 < 0$.

**101.**




**102.**




**103.** a) $R = \left(\frac{1,33-1}{1,33+1}\right)^2 \approx 0,020$, o tai sudaro $\approx 2,0\%$;
b) $R = \left(\frac{1,5-1}{1,5+1}\right)^2 = 0,04$, o tai sudaro $4,0\%$;
c) $R = \left(\frac{2,42-1}{2,42+1}\right)^2 \approx 0,172$, o tai sudaro $\approx 17,2\%$.

**104.** $A_5 = 4 \cdot 10^5 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 4 \cdot 10^5 \cdot (1,04)^5 \approx 486\,661$ (m$^3$) arba $\approx 4,9 \cdot 10^5$ (m$^3$).

**105.** Jei pradinė įrengimų kaina $A_0$, o $p$ — kainos metinio mažėjimo procentas, tai po $t$ metų įrengimai kainuos $A_t = A_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$. Įstatę reikšmes, gausime: $A_{10} = 120\,000 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{10} \approx 71848,43$ (Lt).

## 12.2. Rodiklinės lygtys

Svarbiausioji lygtis yra, žinoma, $a^x = b$ $(a > 0)$. Reikia pabrėžti, kad ji turi sprendinį tik tada, kai $b > 0$, ir tik vieną. Tas sprendinys ieškomas bandant užrašyti skaičių $b$ laipsniu su pagrindu $a$, t. y. $b = a^c$. Į klausimą, ką daryti, jei tai nepavyksta, atsakymas kol kas tik toks — šiek tiek palūkėkite!
Visa rodiklinių lygčių sprendimo praktika — pertvarkant reiškinius arba keičiant nežinomąjį suvesti lygtį į paprasčiausią, t. y. į lygtį $a^x = b$ $(a > 0)$.

***Žinome:***

kada lygtis $a^x = b$ $(a > 0)$ turi sprendinį;

kaip rasti lygties $a^x = b$ $(a > 0)$ sprendinį grafiškai;

kaip rasti lygties $a^x = b$ $(a > 0)$ sprendinį užrašius skaičių $b$ laipsniu su pagrindu $a$.

***Mokame*** remiantis laipsnių savybėmis bei keičiant nežinomąjį, suvesti rodiklinę lygtį į pačią paprasčiausią.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Net ir sudėtingiausia iš pirmo žvilgsnio rodiklinė lygtis dažniausiai slepia paprastutę lygtį $a^x = b$ (vieną ar kelias).
Galima pajuokauti: lengviau paprastą dalyką paslėpti, negu surasti. Išties, pavyzdžiui, iš lygties $2^x = 2$ paklėlę kvadratu gausime lygtį $4^x = 4$, o abi sudėję — lygtį $4^x + 2^x = 6$. Vieni žinos, kaip šią lygtį spręsti, kiti tiesiog įspės sprendinį, o treti — nežinos ką daryti.
Visas būtinas žinias apie rodiklinių lygčių sprendimą, moksleiviai įgys išsprendę 106–108 pratimus. Kitus uždavinius galima spręsti pasirinktinai.

**106.** a) 2; −2 ir 3; $1\frac{1}{3}$; 4; b) 2; 1; lygtis sprendinių neturi; lygtis sprendinių neturi; c) 1 ir 3; 1 ir 3; 0 ir 1; lygtis sprendinių neturi; d) 3; 1; 4; 1.

**107.** a) 0,5; b) −1; c) −3; d) −1; e) $\frac{1}{4}$; f) 1,6.

**108.** a) Abi lygties $12^x = 64 \cdot 3^x$ puses padalįję iš $3^x$, gauname lygtį: $4^x = 64$, $x = 3$.
b) Abi lygties $10^x = 625 \cdot 2^x$ puses padalįję iš $2^x$, gauname lygtį: $5^x = 625$, $x = 4$.
c) Abi lygties $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$ puses padalįję iš $9^x$, gauname lygtį $6 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 13 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^x + 6 = 0$. Pažymėję $\left(\frac{2}{3}\right)^x = m$, gauname kvadratinę lygtį $6m^2 - 13m + 6 = 0$, $m_1 = \frac{3}{2}$, $m_2 = \frac{2}{3}$. Tada $x_1 = -1$ ir $x_2 = 1$.
d) Abi lygties $9 \cdot 9^{\sqrt{x}} - 13 \cdot 6^{\sqrt{x}} + 4 \cdot 4^{\sqrt{x}} = 0$ puses padalįję iš $4^{\sqrt{4}}$, gauname lygtį $9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2\sqrt{x}} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{x}} + 4 = 0$. Pažymėję $\left(\frac{3}{2}\right)^{\sqrt{x}} = m$ ir išsprendę gautą kvadratinę lygtį, gauname $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{4}{9}$. Tada $\sqrt{x} = 0$, $x = 0$; $\sqrt{x} = -2$ (netinka).
e) Abi lygties $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$ puses padalįję iš $36^x$, gauname lygtį $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = 5$. Pažymime $\left(\frac{4}{9}\right)^x = m$. Tada $3 \cdot m + \frac{2}{m} - 5 = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{2}{3}$ ir $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$.
f) Abi lygties $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$ puses padalįję iš $3^{2x}$, gauname lygtį $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{6}{9}\right)^x - 2 = 0$. Pažymime $\left(\frac{2}{3}\right)^x = m$. Tada $3m^2 + m - 2 = 0$, $m_1 = \frac{2}{3}$, $m_2 = -1$ (netinka); $x = 1$.

**109.** *Nurodymas.* Norint rasti funkcijos $f(x)$ grafiko ir $Ox$ ašies kirtimosi taško koordinates, reikia išspręsti lygtį $f(x) = 0$.
a) (2; 0); b) (2; 0); c) (4; 0); d) (3; 0); e) (3; 0); f) (2; 0).

**110.** a) $12^{x-5} = 14^{x-5}$, $\left(\frac{12}{14}\right)^{x-5} = 1$, $x - 5 = 0$, $x = 5$;
b) $x = 2$; c) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$; d) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$.

**111.** *Nurodymas.* Reikia rasti lygties $f(x) = g(x)$ sprendinius.
a) $2^{7x-x^2} = 4^{x+2}$, $7x - x^2 = 2x + 4$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$;
b) $3^{x+2} = 3^{x+1} + 18$, $3^x(3^2 - 3) = 18$, $3^x = 3$, $x = 1$;
c) $3 \cdot 4^x + 4 = 16^x$, $4^x = -1$ (sprendinių nėra), $4^x = 4$, $x = 1$;
d) $\frac{1}{6^{x-1}} = 7 - \frac{1}{6^x}$, $6^x = 1$, $x = 0$;
e) $\frac{1}{2^{x-1}} - 2 = \frac{1}{2^x}$, $2^x = \frac{1}{2}$, $x = -1$;
f) $5 \cdot 4^x = 2 \cdot 25^x - 3 \cdot 10^x$, $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{5}$, $x = 1$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x = -1$ (sprendinių nėra);
g) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - 128 = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{6x} - 128 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = m$, $m^2 - 8m - 128 = 0$, $m_1 = 16$, $m_2 = -8$ (netinka), $x = -1\frac{1}{3}$;
h) $64^{\frac{1}{x}} = 2^{3+\frac{3}{x}} - 16$, $8^{\frac{2}{x}} = 8 \cdot 8^{\frac{1}{x}} - 16$, $8^{\frac{1}{x}} = m$, $m^2 - 8m + 16 = 0$, $m = 4$, $x = 1{,}5$.

**112.** a) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5. \end{cases}$ Į pirmąją sistemos lygtį įstatę $x = 5 - y$, gausime $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ ir $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

b) Sprendimas analogiškas a) punktui.

c) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 8\frac{1}{9}, \\ 2^x - 3^y = 7\frac{8}{9}. \end{cases}$ Sudėję panariui sistemos lygtis, gauname: $2 \cdot 2^x = 16$, $2^x = 8$, $x = 3$. Tada $y = -2$.

d) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ \frac{5^x}{5} + \frac{5^y}{5} = 30; \end{cases}$ $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ 5^x + 5^y = 150. \end{cases}$ Panariui sudėję sistemos lygtis, gauname: $2 \cdot 5^x = 250$, $5^x = 125$, $x = 3$. Tada $y = 2$.

e) $\begin{cases} 7^x - 16y = 0, \\ 4^x - 49y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \frac{7^x}{16}, \\ y = \frac{4^x}{49}; \end{cases}$ $\frac{7^x}{16} = \frac{4^x}{49}$, $\left(\frac{7}{4}\right)^x = \frac{16}{49}$, $x = -2$, $y = \frac{1}{784}$.

f) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7. \end{cases}$ Pažymėję $3^x = m$, $2^{\frac{y}{2}} = k$, gauname lygčių sistemą: $\begin{cases} m^2 - k^2 = 77, \\ m - k = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} m + k = 11, \\ m - k = 7; \end{cases}$ $m = 9$, $k = 2$. Tada $3^x = 9$, $x = 2$ ir $2^{\frac{y}{2}} = 2$, $y = 2$.

*Atsakymas.* a) $(2; 3)$, $(3; 2)$; b) $(2; 1)$; c) $(3; -2)$; d) $(3; 2)$; e) $\left(-2; \frac{1}{784}\right)$; f) $(2; 2)$.

## 12.3. Rodiklinės nelygybės

Svarbiausia išmokti teisingai spręsti paprasčiausias nelygybes $a^x < b$ ir $a^x > b$. Šių nelygybių sprendimas aiškinamas pasitelkiant grafikus. Kad tokių nelygybių sprendimo taisyklė (kada keičiame nelygybės ženklą priešingu, kada nekeičiame) nebūtų įsimenama mechaniškai, galbūt verta kelias nelygybių sprendimo užduotis papildyti reikalavimu pavaizduoti nelygybės $a^x < b$ ($a^x > b$), į kurią suvedama pradinė nelygybė, sprendimą grafiškai.

Skyrelis pradedamas pavyzdžiu. Galima jį panagrinėti iš pat pradžių, galima vėliau, aptarus nelygybių sprendimą. Galima šį pavyzdį paversti mažu tyrinėjimo uždaviniu: kiek toli galėtume nubrėžti grafiką, kad jis būtų virš $Ox$ ašies, jeigu linijos storis būtų lygus atomo skersmeniui (apie $10^{-8}$cm)?

Kitos rodiklinės nelygybės sprendžiamos suvedant jas į paprasčiausias. Kaip ir rodiklinių lygčių atveju, suvedant remiamės laipsnių savybėmis ir nežinomojo keitimu.

***Žinome:***

kaip spręsti paprasčiausias rodiklines nelygybes;
kaip pavaizduoti sprendimą grafiškai.

***Mokame:***

suvesti rodiklines nelygybes į paprasčiausias, remiantis laipsnių savybėmis ir keičiant nežinomuosius;
teisingai užrašyti rodiklinės nelygybės sprendinius.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Visus rodiklinių nelygybių sprendimo įgūdžius galima įgyti aiškinantis, kaip sprendžiamos 115 uždavinio nelygybės. Joms ir reikėtų skirti pagrindinį dėmesį, galbūt, iš pradžių aptarus „paruošiamuosius" 113 ir 114 pratimus.

Kiti uždaviniai tinka namų užduotims bei savarankiškam darbui jau suvokus, kaip sprendžiamos rodiklinės nelygybės.

**113.** a) Taip; b) taip; c) ne.

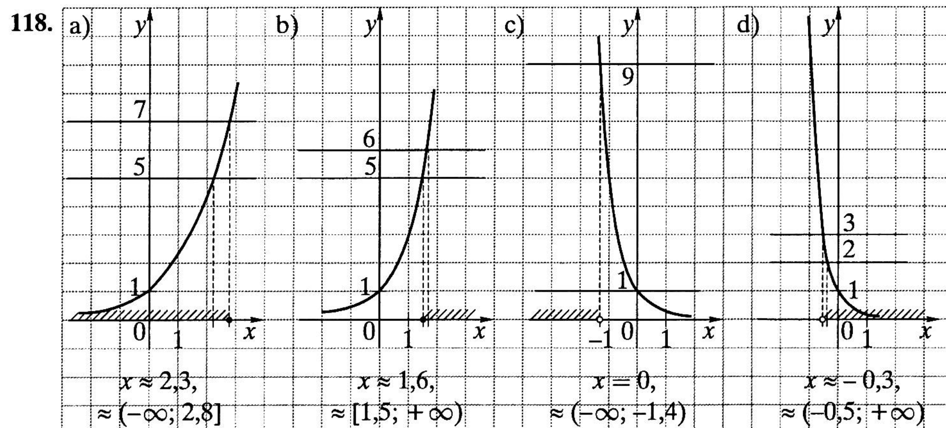
**114.** a) $a < 0$, $0 < a < 1$; b) $a < 0$, $a > 1$; c) $a > 1$; d) $0 < a < 1$;
e) $a > 1$; f) $0 < a < 1$.

**115.** a) $x > -1$; $x > -1$; $x > -2$; $x \leqslant -2$;
b) $x > -\frac{4}{5}$; $x > \frac{1}{2}$; $x > 1$; $x > -\frac{5}{7}$;
c) $x \leqslant -1$ ir $x \geqslant 0$; $x \geqslant -2$; $x < 3$ ir $x > 4$; $x \leqslant 3$ ir $x \geqslant 5$;
d) $x < \frac{1}{3}$ ir $x > \frac{2}{5}$; $x > \frac{1}{2}$; $x < 4$, $x \neq 2$ ir $x > 5$; $2 < x < 5$ ir $5 < x < 6$.

**116.** a) $81^x - 4 \cdot 9^x + 3 \leqslant 0$, $9^x = m$, $m^2 - 4m + 3 \leqslant 0$, $1 \leqslant m \leqslant 3$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.
Vidurio taškas $\frac{1}{4}$.
b) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 < 0$, $5^x = a$, $a^2 - 6a + 5 < 0$, $1 < a < 5$; $0 < x < 1$.
Vidurio taškas $\frac{1}{2}$.
c) $2^{x-3} - 3 \cdot (\sqrt{2})^{x-3} + 2 < 0$, $(\sqrt{2})^{x-3} = m$, $m^2 - 3m + 2 < 0$, $1 < m < 2$,
$1 < (\sqrt{2})^{x-3} < 2$; $0 < x - 3 < 2$, $3 < x < 5$. Vidurio taškas 4.
d) $10 \cdot (\sqrt{3})^{x+1} - 9 - 3^{x+1} \geqslant 0$, $(\sqrt{3})^{x+1} = a$, $a^2 - 10a + 9 \leqslant 0$, $1 \leqslant a \leqslant 9$;
$1 \leqslant (\sqrt{3})^{x+1} \leqslant 9$, $0 \leqslant x + 1 \leqslant 4$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Vidurio taškas 1.

**117.** a) $2^{|x+2|} \geqslant 8$, tai $|x+2| \geqslant 3$; $x+2 \geqslant 3$ arba $x+2 \leqslant -3$. Sprendiniai: $x \geqslant 1$ ir $x \leqslant -5$;
b) $9^{|x-1|} > 3$, tai $|x-1| > \frac{1}{2}$; $x - 1 > \frac{1}{2}$ arba $x - 1 < -\frac{1}{2}$. Sprendiniai: $x > 1\frac{1}{2}$ ir $x < \frac{1}{2}$;
c) $4^{|x-1|} < 8$, tai $2|x-1| < 3$; $|x-1| < 1,5$; $-1,5 < x - 1 < 1,5$, $-0,5 < x < 2,5$;
d) $3^{|x|+2} < 27$, tai $|x| + 2 < 3$; $|x| < 1$, $-1 < x < 1$.

**118.**



**119.** a) $6^k > \sqrt[3]{36}$, $6^k > 6^{\frac{2}{3}}$, $k > \frac{2}{3}$, tai $k = 1, 2, 3, \ldots$;

b) $\sqrt[5]{1024} \leqslant 4^k$, $4 \leqslant 4^k$, $k \geqslant 1$, tai $k = 1, 2, 3, \ldots$;

c) $343 \leqslant 7^{k+2} \cdot \sqrt{49}$, $7^3 \leqslant 7^{k+3}$, $k \geqslant 0$, tai $k = 0, 1, 2, \ldots$;

d) $\sqrt{2\sqrt{2}} > 2^{3k} \cdot \sqrt{512}$, $2^{\frac{3}{4}} > 2^{3k+\frac{9}{2}}$, $k < -\frac{5}{4}$, tai $k = \ldots, -4, -3, -2$.

**120.** *Nurodymas.* Kintamojo reikšmių ieškome spręsdami nelygybę $f(x) \geqslant 0$.

a) $2^x \cdot 5^x - 0{,}1 \cdot 10^{3x} \geqslant 0$, $10^x \geqslant 10^{3x-1}$, $x \leqslant \frac{1}{2}$;

b) $(0{,}25)^{x-3} - \frac{32}{2^{x+2}} \geqslant 0$, $2^{-2x+6} \geqslant 2^{3-x}$, $x \leqslant 3$;

c) $49^{x-2} - 8 \cdot 7^{x-2} + 7 \geqslant 0$, $7^{x-2} = a$, $a^2 - 8a + 7 \geqslant 0$, $a \leqslant 1$ arba $a \geqslant 7$; $7^{x-2} \leqslant 1$, $x \leqslant 2$ arba $7^{x-2} \geqslant 7$, $x \geqslant 3$;

d) $3^{\frac{x-2}{x^2-4x+3}} - 1 \geqslant 0$, $\frac{x-2}{x^2-4x+3} \geqslant 0$, $1 < x \leqslant 2$ ir $x > 3$.

**121.** *Nurodymas.* Kintamojo reikšmių ieškome spręsdami nelygybę $f(x) < 0$.

a) $2^{3x+1} - 2^{3x} + 2^{3x+1} - 12 < 0$, $2^{3x}(2 - 1 + 2) < 12$, $2^{3x} < 4$, $x < \frac{2}{3}$;

b) $81^x - 4 \cdot 9^x + 3 < 0$, $9^x = a$, $a^2 - 4a + 3 < 0$, $1 < a < 3$; $1 < 9^x < 3$, $0 < x < \frac{1}{2}$;

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x-3}} + 27 < 0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x-3}} < -27$, sprendinių nėra;

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{1-x}} - 49 < 0$, $\frac{1}{1-x} > -2$, $x < 1$ ir $x > 1{,}5$.

**122.** 1) $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{4}$, $f(3 - x) = 2^{x^2-3x}$;

2) $f(x) = f(1)$, tai $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$, $x^2 - 3x = -2$, $x = 1$ ir $x = 2$;

3) $f(x) + 2f(3 - x) \leqslant 0{,}75$, $2^{x^2-3x} + 2 \cdot 2^{x^2-3x} \leqslant 0{,}75$, $2^{x^2-3x} \leqslant 0{,}25$, $x^2 - 3x \leqslant -2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$;

4) $\frac{1+2}{2} = 1{,}5$.

**123.** 1) $f(-1) = \frac{1}{9}$, $f(0) = 1$, $f(1 - x) = 3^{x-x^2}$;

2) $f(-1) = f(x)$, tai $\frac{1}{9} = 3^{x-x^2}$, $-2 = x - x^2$, $x = -1$ ir $x = 2$;

3) $2f(x) + f(1 - x) \geqslant \frac{1}{3}$, $2 \cdot 3^{x-x^2} + 3^{x-x^2} \geqslant \frac{1}{3}$, $3^{x-x^2} \geqslant \frac{1}{9}$, $x - x^2 \geqslant -2$, $-1 \leqslant x \leqslant 2$;

4) $0{,}5$.

# 13. LOGARITMINĖ FUNKCIJA

## 13.1. Logaritmo sąvoka

Vadovėlyje logaritmo sąvoka motyvuojama būtinybe turėti patogų žymenį lygties $a^x = b$ sprendiniui žymėti. Kodėl sprendiniui pavadinti pasirinktas toks keistas žodis — logaritmas?
Žodis logaritmas sudarytas suliejus du graikiškus žodžius: logos (graikiškai reiškia žodį, o taip pat ir santykį) bei aritmos (graikiškai — skaičius). Kad iš skaičiaus 2 gautume skaičių 8, pirmąjį skaičių reikia pakelti kubu, t. y. trečiuoju laipsniu. Senovės matematikai galvojo, kad skaičius 3 išreiškia skaičiaus 8 santykį su skaičiumi 2. Todėl 3 ir vadinamas logaritmu, t. y. skaičių santykiu. Žinoma, reikia paminėti ir kam lygus pagrindas.
Istoriškai logaritmai buvo įvesti siekiant palengvinti astronomų skaičiavimus. Tačiau dabar logaritmų naudojimas skaičiavimams nebėra itin aktualus.
Siekiant, kad moksleiviai priprastų prie naujos sąvokos, verta užrašyti vieną ar keletą lygybių, pavyzdžiui:

$$2^5 = 32, \quad \log_2 32 = 5, \quad 2^{\log_2 32} = 32.$$

Tada ir pagrindinė logaritmų tapatybė neatrodys tokia mįslinga. Kam jos reikia? Remiantis šia tapatybe visada galima teigiamą skaičių užrašyti kaip bet kurio kito skaičiaus laipsnį, pavyzdžiui, $5 = 3^{\log_3 5}$ ir t. t. Dažnai tai praverčia sprenžiant įvairius uždavinius.
Verta paminėti, kad skaičių logaritmus galima apytiksliai surasti naudojantis skaičiuokliu.

***Žinome:***

logaritmo apibrėžimą;

pagrindinę logaritmų tapatybę.

***Mokame:***

patikrinti, ar vienas duotasis skaičius yra kito duotojo skaičiaus logaritmas nurodytu pagrindu;

pertvarkant reiškinius su logaritmais, remtis pagrindine logaritmų tapatybe.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelyje nedaug pratimų. Visi jie skirti logaritmo sąvokai įsisamoninti, taip pat įprasti prie logaritmo žymens. Tai nėra lengva. Iš tiesų, pavyzdžiui, lygybė $2^{\log_2 8} = 8$ gali atrodyti kaip kažkokio įmantraus prastinimo pavyzdys. Iš tikrųjų ši lygybė bus teisingai suvokta tik tada, kai sąmonėje švystels „prisiminimai“ net apie du dalykus: logaritmo apibrėžimą ir susitarimą dėl jo žymens.
Galbūt pagrindinė logaritmų tapatybė bus geriau suvokta, jeigu ją aiškinsime, pavyzdžiui, taip: $8 = 2^3$; vadinasi, 3 yra skaičiaus 8 logaritmas pagrindu 2; taigi $3 = \log_2 8$, todėl $8 = 2^{\log_2 8}$.

**124.** Teisingos lygybės yra: a), b), e) ir f). Lygybė $\log_3 \frac{1}{27} = \frac{1}{3}$ neteisinga, nes $3^{\frac{1}{3}} \neq \frac{1}{27}$; lygybė $\log_7 1 = 7$ neteisinga, nes $7^7 \neq 1$.

**125.** a) $\log_5 25 = 2$; b) $\log_7 49 = 2$; c) $\lg 1000 = 3$; d) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$;
e) $\log_2 0{,}125 = -3$; f) $\lg 0{,}01 = -2$; g) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$; h) $\log_{121} 11 = \frac{1}{2}$;
i) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, $a = 0{,}25$; $\log_{0{,}25} 0{,}5 = \frac{1}{2}$.

**126.** a) 3; b) 4; c) 3; d) 3,14; e) 0,5; f) 10; g) 4; h) 25; i) $\sqrt[3]{7}$; j) 900; k) 4; l) 10.

**127.** $\log_5 0{,}04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$;
$\log_5 0{,}2 = \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$;
$\log_5 1 = 0$, $\log_5 5 = 1$, $\log_5 25 = 2$, $\log_5 125 = 3$.

**128.** $\lg 0{,}001 = -3$, $\lg 0{,}01 = -2$, $\lg 0{,}1 = -1$, $\lg 1 = 0$, $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$.

**129.** a) 3; b) $\frac{1}{2}$; c) 216; d) $10^6$; e) 6; f) $-3\frac{1}{3}$; g) $-3$; h) 4; i) 1.

**130.** a) $2 < \log_3 15 < 3$; b) $-1 < \log_4 \frac{1}{2} < 0$; c) $3 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} < 5$;
d) $-3 < \log_{0{,}1} 100 < -1$.

## 13.2. Logaritmų savybės

Logaritmų savybės įrodomos remiantis pagrindine logaritmų tapatybe bei laipsnių savybėmis. Norint tai pabrėžti, pirmųjų dviejų savybių įrodymai pateikiami kartu. Bent vienos savybės įrodymą vertėtų surašyti eilutė po eilutės lentoje. Galima paprašyti pagrįsti kiekvieną eilutę: kuo remdamiesi mes tai parašėme?
Savybių naudą skaičiuojant demonstruoja 1 pavyzdys. Galima panagrinėti šį pavyzdį, pasiūlyti atlikti po jo pateiktą užduotį arba kurį nors pratimą iš 144 užduoties.
Skyrelyje įrodomos dvi logaritmo pagrindo keitimo formulės. Pirmoji įrodoma labai paprastai:

$$x = a^{\log_a x}, \quad x^k = a^{k\log_a x} = \left(a^k\right)^{\log_a x},$$
$$\log_a x = \log_{a^k} x^k.$$

Antroji formulė įrodoma remiantis pirmąja. Užuot nagrinėjus pateiktą įrodymą, galima iliustruoti jį skaitiniu pavyzdžiu. Pavyzdžiui, remdamiesi pirmąja formule, išreikškime logaritmą pagrindu 2 logaritmu pagrindu 3:

$$\log_2 x = \log_{3^{\log_3 2}} x.$$

Dešinėje lygybės pusėje pakėlę logaritmo pagrindą ir skaičių $x$ laipsniu $\frac{1}{\log_3 2}$, gauname lygybę:

$$\log_2 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 2}.$$

Galima pasiūlyti įrodyti pirmąją formulę remiantis antrąja. Taigi formulės išplaukia viena iš kitos, kitaip tariant yra ekvivalenčios. Skaičiuojant vienos iš jų pakanka visiems atvejams.

***Žinome:***

logaritmų savybes;

logaritmų savybių įrodymo metodą.

***Mokame*** taikyti logaritmų savybes, taip pat pagrindo keitimo formules pertvarkant reiškinius bei skaičiuojant jų reikšmes.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Svarbiausias šio skyrelio pratimų tikslas — išmokti remtis logaritmų savybėmis. Tam skirti 131–140 uždaviniai. Žinoma, ne visas jų dalis būtina išspręsti. Verta išspręsti ir vieną ar kitą 144 pratimo dalį, t. y. ne tik suprastinti logaritminį reiškinį, tačiau skaičiuokliu rasti ir jo apytikslę reikšmę.

**131.** a) $\log_7 5 + \log_7 a$; b) $\log_b 4 + 1$; c) $\log_5 24 + 1$; d) $\lg 5 + \lg 3 + 1$;
e) $1 - \lg n$; f) $\log_5 4 - 1$; g) $2 - \log_6 7$; h) $\log_3 0{,}17 - 2$; i) $2 - \log_{\frac{1}{2}} 7$;
j) $\frac{1}{2} - \log_3 5$.

**132.** a) 1; b) 2; c) 3; d) $-1$; e) 1; f) 1.

**133.** a) 3; b) 5; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{2}$.

**134.** a) $1 + 3\log_5 a + \frac{1}{2}\log_5 m$; b) $2\log_5 |x| - \log_5 y - 2$;
c) $-1 + 4\log_5 |a| + \frac{1}{3}\log_5 b - 2\log_5 c$; d) $3 + \log_5 3 - \frac{1}{3}\log_5 a - \frac{1}{3}\log_5 b$.

**135.** a) $1 + 2\lg |x| - 5\lg y$; b) $\lg 3 + 10\lg |a| - 2$;
c) $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\lg a + \frac{1}{2}\lg b$; d) $5\lg m + \frac{1}{6}\lg k - \frac{1}{2}$.

**136.** a) $x = \frac{b\sqrt{a+b}}{(a-b)^4}$; b) $x = \frac{b^2}{a^2\sqrt[3]{m}}$; c) $x = \frac{7}{ab}$; d) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{mc}\cdot\sqrt{n}}$.

**137.**

| $a =$ | $\log_8 3$ | $\log_4 7$ | $\log_3 20$ | $\log_{\frac{1}{5}} 4$ | $\log_{0,1} 8$ | $\lg 3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Naujasis pagrindas | 5 | 10 | 2 | 3 | 10 | 8 |
| $a =$ | $\frac{\log_5 3}{\log_5 8}$ | $\frac{\lg 7}{\lg 4}$ | $\frac{\log_2 20}{\log_2 3}$ | $\frac{\log_3 4}{\log_3 \frac{1}{5}}$ | $\frac{\lg 8}{-1}$ | $\frac{\log_8 3}{\log_8 10}$ |

**138.** a) $\log_3(\log_2 8) = \log_3 3 = 1$; b) $\log_2(\log_3 81) = \log_2 4 = 2$.

**139.** a) $\sqrt{\log_4 256} = \sqrt{4} = 2$; b) $\log_3 \sqrt{81} = \log_3 9 = 2$;
c) $\log_3^2 9 = (\log_3 9)^2 = 2^2 = 4$; d) $\log_2^3 16 = (\log_2 16)^3 = 4^3 = 64$;
e) $\log_3 9^2 = 2\log_3 9 = 2\cdot 2 = 4$; f) $\log_2 16^3 = 3\log_2 16 = 3\cdot 4 = 12$.

**140.** a) 3; 2; $-4$; 1,5; b) $-6$; 4; $-\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{5}$; $-2$; $-\frac{3}{4}$; d) 0; $-\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{2}$.

**141.** a) Pirmiausiai iš lygybės $x = 10\cdot 2^y$ išreiškime $2^y$. Gausime $2^y = \frac{x}{10}$ ir imdami abiejų pusių logaritmus pagrindu 2 gauname: $\log_2 2^y = \log_2 \frac{x}{10}$, $y = \log_2 \frac{x}{10}$.
b) $y = \log_5 x - 1$; c) $y = 1 - \log_6 x$;
d) $y = \log_5 \frac{\sqrt{10}}{x} + 2 = \log_5 \sqrt{10} - \log_5 x + 2$.

**142.** *I būdas*. Sumą $\log_a \frac{2}{1}+\log_a \frac{3}{2}+\cdots+\log_a \frac{n+1}{n}$ pakeičiame sandaugos logaritmu: $\log_a\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\log_a(n+1)$.

*II būdas*. $\log_a \frac{2}{1}+\log_a \frac{3}{2}+\cdots+\log_a \frac{n+1}{n}=\log_a 2-\log_a 1+\log_a 3-\log_a 2+\cdots+\log_a(n+1)-\log_a n=\log_a(n+1)$.

**143.** a) $\lg 245>0$, nes $245>1$; $\lg 2{,}45>0$, nes $2{,}45>1$; $\lg\frac{\sqrt{11}}{4}<0$, nes $\frac{\sqrt{11}}{4}<1$; $\lg(0{,}6)^{-6}=-6\lg 0{,}6>0$, nes $\lg 0{,}6<0$ ir $-6<0$.

Panašiai sprendžiame ir likusius pratimus:

b) $\lg 1{,}5^2>0$; $\lg 0{,}96<0$; $\lg 2{,}5^{-0{,}25}<0$; $\lg\frac{\sqrt{53}}{7}>0$;

c) $\lg\frac{2\sqrt{6}}{5}<0$; $\lg\sqrt[3]{1{,}03}>0$; $\lg(\sqrt{75}-8)<0$, nes $\sqrt{75}-8<\sqrt{81}-8=1$; $\lg\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\lg\frac{1}{2}>0$.

**144.** a) $\lg(5\cdot\sqrt{10})=\lg 5+\lg\sqrt{10}\approx 0{,}7+0{,}5=1{,}2$;

b) $\lg\frac{5}{1000}=\lg 5-\lg 1000\approx 0{,}7-3=-2{,}3$;

c) $\lg\frac{36}{\sqrt[4]{4}}=\lg 6^2-\lg 4^{\frac{1}{4}}\approx 2\cdot 0{,}8-\frac{1}{4}\cdot 0{,}6=1{,}45$;

d) $\lg\left(\sqrt[3]{6}\cdot 64\right)=\frac{1}{3}\lg 6+3\lg 4\approx\frac{1}{3}\cdot 0{,}8+3\cdot 0{,}6=2\frac{1}{15}$;

e) $\log_{\sqrt{10}}4=\frac{\lg 4}{\lg\sqrt{10}}\approx\frac{0{,}6}{\frac{1}{2}}=1{,}2$;

f) $\log_{1000}\sqrt{5}=\frac{\lg\sqrt{5}}{\lg 1000}\approx\frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}7}{3}=\frac{7}{60}$;

g) $\log_{100\sqrt{10}}24=\frac{\lg 24}{\lg(100\sqrt{10})}=\frac{\lg 4+\lg 6}{2{,}5}\approx\frac{0{,}6+0{,}8}{2{,}5}=\frac{14}{25}$;

h) $\log_{\sqrt[3]{10}}20=\frac{\lg 20}{\lg\sqrt[3]{10}}=\frac{\lg 4+\lg 5}{\frac{1}{3}}\approx\frac{0{,}6+0{,}7}{\frac{1}{3}}=3{,}9$;

i) $\log_5\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\lg\left(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\right)}{\lg 5}=\frac{\lg\left(\frac{2^{\frac{5}{2}}}{6}\right)}{\lg 5}=\frac{\lg 2^{\frac{5}{2}}-\lg 6}{\lg 5}=\frac{\lg 4^{\frac{5}{4}}-\lg 6}{\lg 5}=\frac{\frac{5}{4}\lg 4-\lg 6}{\lg 5}\approx\frac{\frac{5}{4}\cdot 0{,}6-0{,}8}{0{,}7}=-\frac{1}{14}$.

## 13.3. Logaritminė funkcija ir jos savybės

Gauti logaritminę funkciją galima labai paprastai. Imkime rodiklinę funkciją, užrašytą formule $y = a^x$. Ar galima išreikšti dydį $x$ dydžiu $y$? Dabar jau mokame tai daryti: $x = \log_a y$. Ką gi gauname, išreiškę funkcijos nepriklausomąjį kintamąjį priklausomuoju? Atvirkštinę funkciją. Taigi gavome funkciją, atvirkštinę rodiklinei funkcijai $y = a^x$. Ji vadinama logaritmine.
Prieš sukeičiant nepriklausomojo ir priklausomojo kintamųjų žymenis, galima aptarti, kokios yra logaritminės funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritys. Rodiklinės funkcijos reikšmių sritis yra teigiamieji realieji skaičiai, vadinasi, logaritminė funkcija apibrėžta tik su teigiamomis kintamojo reikšmėmis. Kai $a > 1$, rodiklinė funkcija yra didėjanti, taigi ir jos atvirkštinė — logaritminė funkcija su pagrindu $a > 1$ — yra didėjanti. Kai $0 < a < 1$, rodiklinė funkcija yra mažėjanti, taigi ir logaritminė funkcija su pagrindu $0 < a < 1$ yra mažėjanti.
Dabar jau logaritminės funkcijos formulėje $x = \log_a y$ galima sukeisti žymenis: nepriklausomąjį kintamąjį žymėti $x$, o priklausomąjį — $y$. Belieka nubrėžti logaritminės funkcijos $y = \log_a x$ grafiką, atidėjus kelis grafiko taškus ir juos sujungus; arba nubrėžti remiantis tuo, kad logaritminės funkcijos grafikas gaunamas iš rodiklinės funkcijos grafiko atvaizdavus pastarąjį simetriškai tiesės $y = x$ atžvilgiu.
Skyrelyje dar aiškinama, kaip bet kurios logaritminės funkcijos grafikas gali būti gaunamas iš vienos funkcijos grafiko jį atitinkamai transformavus (ištempiant ar suspaudžiant). Tą aiškinti nebūtina, tačiau kai kam gali būti įdomu. Galima pasiūlyti panagrinėti tuos samprotavimus patiems.

***Žinome ir suvokiame:***

logaritminė funkcija yra atvirkštinė rodiklinei;
logaritminė funkcija yra didėjanti, kai pagrindas didesnis už vienetą, ir mažėjanti, kai pagrindas teigiamas, bet mažesnis už vienetą.

***Mokame:***

braižyti logaritminių funkcijų grafikus;
remiantis logaritminių funkcijų savybėmis palyginti logaritmus tuo pačiu pagrindu.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

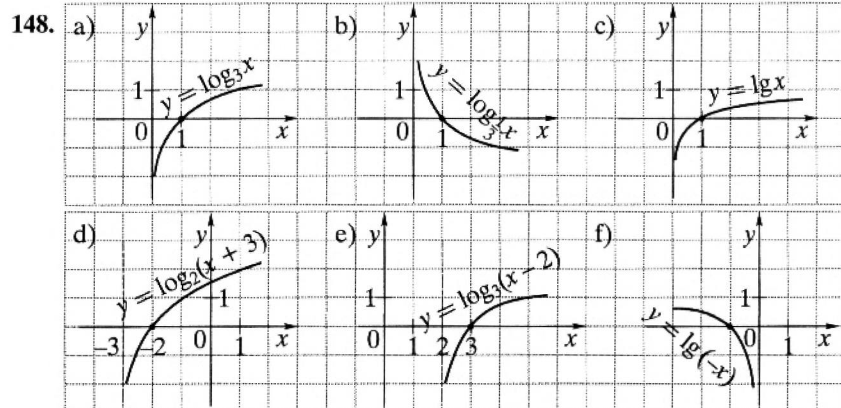
Svarbiausias šio skyrelio klausimas — logaritminės funkcijos savybės, grafikai, naudojimasis jais lyginant skaičius ar apytiksliai sprendžiant lygtis.
Svarbiausi yra 147, 148, 152–156 uždaviniai. Kelių logaritminių funkcijų grafikų tarpusavio padėtis moksleiviai geriau įsisąmonins atlikę 158 pratimo užduotis.

**145.** a) $x > -10$; b) $x > 10$; c) $x < 3$; d) $x < \frac{2}{5}$; e) $x = \boldsymbol{R}$; f) $-2 < x < 2$; g) $x = \boldsymbol{R}$; h) $-2 < x < 3$; i) $-2 < x < 4$; j) $-4 < x < 2$.

**146.** a) **A**; b) **E**.

**147.** Grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu, nes funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra viena kitai atvirkštinės.

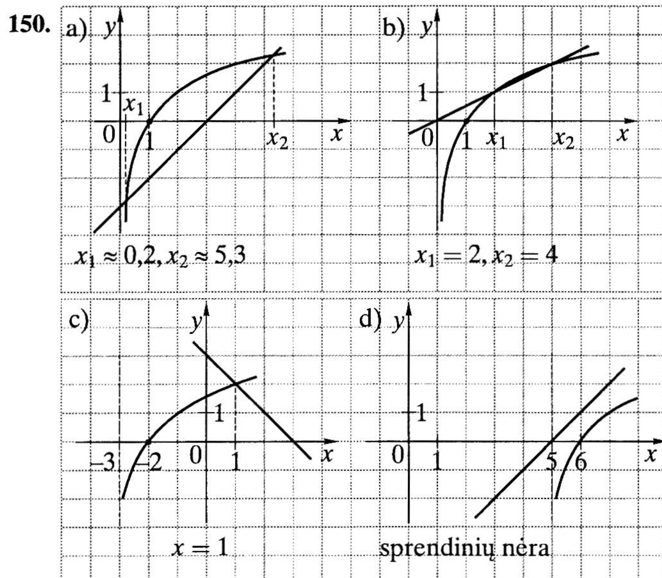
**148.**




Funkcijos $f(x)$ savybės:
a) $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; didėjanti;
b) $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; mažėjanti;
c) $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; didėjanti;
d) $D_f = (-3; +\infty)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; didėjanti;
e) $D_f = (2; +\infty)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; didėjanti;
f) $D_f = (-\infty; 0)$, $E_f = \boldsymbol{R}$; mažėjanti.

**149.** a) Sprendinių nėra; b) vienas sprendinys; c) vienas sprendinys; d) du sprendiniai.

**150.**




**151.** a) $\begin{cases} x-2>0, \\ x+2>0; \end{cases}$ $x>2$; b) $\begin{cases} x-3>0, \\ x+10>0; \end{cases}$ $x>3$.

**152.** $\left(\frac{1}{4}; -1\right)$, $(16; 2)$, $\left(\frac{1}{64}; -3\right)$.

**153.** a) Kadangi $5 < 10$, tai nelygybė $\log_x 5 < \log_x 10$ yra teisinga, kai $x > 1$;
b) kadangi $10 > 5$, tai nelygybė $\log_x 10 < \log_x 5$ yra teisinga, kai $0 < x < 1$;
c) kadangi $\frac{3}{2} > \frac{1}{3}$, tai nelygybė $\log_x \frac{3}{2} > \log_x \frac{1}{3}$ yra teisinga, kai $x > 1$;
d) kadangi $1 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, tai nelygybė $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$ yra teisinga, kai $0 < x < \frac{1}{3}$.

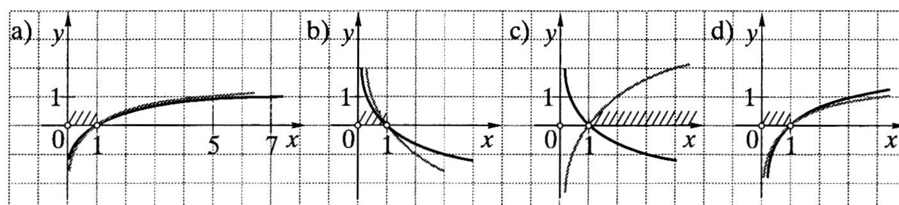
**154.** $\log_2 7 > 0$, $\log_3 8 > 0$, $\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} > 0$, $\log_{0,3} 0{,}4 > 0$, $\lg 0{,}1 < 0$, $\lg 100 > 0$.

**155.** a) $\log_3 6 > \log_3 2$; b) $\log_{0,2} 6 < \log_{0,2} 2$; c) $\log_3 4 + \log_3 7 > \log_3(4+7)$;
d) $\log_{0,2} 2{,}5 + \log_{0,2} 4 = \log_{0,2} 10$; e) $\lg 24 - \lg 6 = \lg 4$;
f) $\log_{\frac{1}{5}} 28 = \log_{\frac{1}{5}} 84 - \log_{\frac{1}{5}} 3$.

**156.** a) $\frac{\lg 5 + \lg 9}{2} = \lg\sqrt{45} < \lg\sqrt{49} = \lg 7 = \lg \frac{5+9}{2}$;
$\frac{\lg 6 + \lg 7}{2} = \lg\sqrt{42} < \lg \frac{7+6}{2}$, nes $42 < \left(\frac{7+6}{2}\right)^2$, taigi $\sqrt{42} < \frac{7+6}{2}$;
$\lg 15 - \lg 3 = \lg \frac{15}{3} = \lg 5 = \lg\sqrt{25} < \lg\sqrt{26} = \frac{1}{2}\lg 26$;
b) $2\lg 5 < 5\lg 2$; $\frac{1}{2}\lg 90 > 2\lg 3$;
$\lg 2 + \lg 7 = \lg 14 = \lg\sqrt{196} < \lg\sqrt{200} = \frac{1}{2}\lg 200$;
c) $3\lg 3 > \frac{1}{2}\lg 30$; $\frac{1}{2}\lg 18 < \lg 5{,}5$;
$\frac{1}{2}\lg 615 = \lg\sqrt{615} < \lg\sqrt{625} = \lg 25 = 2\lg 5$.

**157.** a) $f(x) = -1$, kai $x = 2{,}35$; $f(x) = 0$, kai $x = 2{,}5$; $f(x) = 2$, kai $x = 19$;
b) $f(x) = -1$, kai $x_1 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $f(x) = 0$, kai $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{5}$;
$f(x) = 2$, kai $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 2\sqrt{2}$;
c) $f(x) = -1$, kai $x = \frac{2}{9}$; $f(x) \neq 0$, su visais $x$; $f(x) = 2$, kai $x = -2\frac{2}{99}$;
d) $f(x) = -1$, kai $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x+1}{x} = -1$, $\frac{x+1}{x} = 5$ ir $x = \frac{1}{4}$;
$f(x) = 0$, kai $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x+1}{x} = 0$, $\frac{x+1}{x} = 1$, lygtis sprendinių neturi;
$f(x) = 2$, kai $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x+1}{x} = 2$, $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{25}$, $x = -1\frac{1}{24}$.

**158.** *Nurodymas.* Pratimus a)–d) geriausia spręsti nusibraižius grafikus.




*Atsakymas.* a) $0 < x < 1$; b) $0 < x < 1$; c) $x > 1$; d) $0 < x < 1$;
e) $5 < 7$, tai $0 < 2x < 1$ ir $0 < x < \frac{1}{2}$; f) $\pi > 3$, tai $0 < \frac{1}{x} < 1$ ir $x > 1$.

## 13.4. Logaritminės lygtys

Pagrindinė idėja, kuria remiamės spręsdami logaritmines lygtis itin paprasta: jeigu skaičių logaritmai tuo pačiu pagrindu yra lygūs, tai ir patys skaičiai yra lygūs. Tuo remiamės spręsdami lygtis: gavę lygybę, kurios abiejose pusėse yra logaritmai tuo pačiu pagrindu, logaritmus nubraukiame ir sprendžiame šitaip „suprastintą" lygtį. Tačiau! Galima paklausti, ar teisingas ir atvirkščias teiginys: jeigu skaičiai lygūs, ar jų logaritmai tuo pačiu pagrindu irgi lygūs? Kas nors galbūt atsakys, kad taip. Visus turėtų įtikinti, kad taip nėra, tokie argumentai: $-1 = -1$, tačiau ar šių skaičių logaritmai yra lygūs? Jie negali būti lygūs, nes paprasčiausiai neapibrėžti. Kad galėtume palyginti du skaičius, visų pirma tie skaičiai turi egzistuoti.

Štai kodėl išsprendę logaritminę lygtį, dar turime patikrinti, ar gautieji skaičiai tikrai tenkina lygtį. Galbūt jie tinka lygčiai be logaritmų (pavyzdžiui, lygties $x^2-2 = 2x-3$ sprendinys yra $x = 1$), tačiau nėra lygties su logaritmais sprendinys (lygtis $\log_3(x^2-2) = \log_3(2x-3)$ sprendinių neturi).

Pavyzdžiais rodoma, kaip remiantis logaritmų savybėmis, logaritmines lygtis galima suvesti į paprasčiausias logaritmines lygtis. Galima prisiminti, kad kiekvieną teigiamą skaičių galima užrašyti kaip laipsnį nurodytu pagrindu, pavyzdžiui, $3 = 5^{\log_5 3}$. Kiekvieną realųjį skaičių galima užrašyti kaip logaritmą nurodytu pagrindu:

$$3 = \log_5 5^3, \quad 0 = \log_5 5^0, \quad -3 = \log_5 5^{-3}.$$

Tuo tenka dažnai pasinaudoti.

Šiek tiek kitoks yra 3 pavyzdys. Šio pavyzdžio lygtį sprendžiame remdamiesi teiginiu: jeigu teigiami skaičiai yra lygūs, tai ir jų logaritmai lygūs. Tokia yra lygties „logaritmavimo" pasirinktuoju pagrindu esmė.

***Žinome***, kad gavus skaičius, kurie pretenduoja būti logaritminės lygties sprendiniais, reikia patikrinti, ar jie lygčiai tinka.

***Mokame*** remdamiesi logaritmų savybėmis pertvarkyti logaritmines lygtis į paprasčiausias ir jas išspręsti.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Visi svarbiausi veiksmai, kurių tenka griebtis sprendžiant logaritmines lygtis, bus išbandyti sprendžiant 159–163 uždavinius. „Būtinasis minimumas" gali būti, pavyzdžiui, toks: 159a,c,e, 160a,d,e,g, 161a,c, 162a,e, 163a,b. Žinoma, įgūdžiams įtvirtinti to nepakaks. Teks pasirinkti ir išspręsti daugiau. Yra iš ko!

**159.** a) $-4\frac{1}{3}$; b) 1002; c) 2; d) 15; e) 8;
f) $\log_\pi\left(\log_2(\log_6 x)\right) = 0$, $\log_2(\log_6 x) = \pi^0$, $\log_2(\log_6 x) = 1$, $\log_6 x = 2$, $x = 36$.

**160.** a) Išsprendę sistemą $\begin{cases} x+3>0, \\ x+1>0 \end{cases}$ randame duotosios lygties apibrėžimo sritį: $x \in (-1; +\infty)$. Tai nėra būtina, tačiau nenustačius apibrėžimo srities, teks patikrinti, ar surastos nežinomojo reikšmės yra lygties sprendiniai.
$\log_4(x+3)-\log_4(x+1) = 2-\log_4 8$, $\log_4\frac{x+3}{x+1} = \log_4\frac{16}{8}$, $\frac{x+3}{x+1} = 2$, $x = 1$.
Kadangi $1 \in (-1; +\infty)$, tai $x = 1$ yra duotosios lygties sprendinys;
b) 4;
c) $\frac{\lg x}{\lg(5x-6)} = \frac{1}{2}$, $\lg x = \frac{1}{2}\lg(5x-6)$, $x = \sqrt{5x-6}$, $x^2 = 5x-6$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (arba: $\frac{\lg x}{\lg(5x-6)} = \frac{1}{2}$, $2\lg x = \lg(5x-6)$, $x^2 = 5x-6$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$).
Patikriname, ar surastos $x$ reikšmės yra lygties sprendiniai:
kai $x = 2$, tai $\frac{\lg 2}{\lg(5\cdot 2-6)} = \frac{\lg 2}{\lg 4} = \frac{\lg 2}{2\lg 2} = \frac{1}{2}$;
kai $x = 3$, tai $\frac{\lg 3}{\lg(5\cdot 3-6)} = \frac{\lg 3}{\lg 9} = \frac{\lg 3}{2\lg 3} = \frac{1}{2}$.
Taigi $x = 2$ ir $x = 3$ yra duotosios lygties sprendiniai.
d) $x_1 = 1$, $x_2 = 6$;
e) $\frac{\log_2 x-\log_2 3}{\log_2 x-\log_2 2} = \frac{1}{2}$, $\frac{\log_2\frac{x}{3}}{\log_2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$, $2\log_2\frac{x}{3} = \log_2\frac{x}{2}$, $\frac{x^2}{9} = \frac{x}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4{,}5$.
Sprendinys $x = 0$ nepriklauso lygties apibrėžimo sričiai. Taigi lieka vienintelis sprendinys $x = 4{,}5$;
f) $x = 2$;
g) $\lg(3x^2+7)-1 = \lg(3x-2)$, $\lg\frac{3x^2+7}{10} = \lg(3x-2)$, $\frac{3x^2+7}{10} = 3x-2$, $x^2-10x+9 = 0$, $x_1 = 9$, $x_2 = 1$; abi $x$ reikšmės yra lygties sprendiniai;
h) 3; $-1{,}4$.

**161.** a) 3 ir 9; b) $\frac{1}{4}$ ir 16; c) 25 ir 125; d) $10^{-4}$ ir 10.

**162.** a) 27; b) 16; c) 25; d) 16; e) 16;
f) $\log_{81} x + \log_{27} x - \log_3 x + \frac{5}{6} = 0$, $\frac{\log_3 x}{\log_3 81} + \frac{\log_3 x}{\log_3 27} - \log_3 x + \frac{5}{6} = 0$, $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\cdot\log_3 x = -\frac{5}{6}$, $\log_3 x = 2$, $x = 9$.

**163.** a) $\frac{1}{5}$ ir 5;

b) $x^{\lg\sqrt{x}} = 100$, $\lg x^{\lg\sqrt{x}} = \lg 100$, $\lg\sqrt{x}\cdot\lg x = 2$, $\frac{1}{2}\lg x\cdot\lg x = 2$, $\lg^2 x = 4$, $\lg x = 2$, $x = 10^2 = 100$ ir $\lg x = -2$, $x = 10^{-2} = 0{,}01$;

c) $x^{\log_7 x} = 49$, $\log_7 x^{\log_7 x} = \log_7 49$, $\log_7^2 x = 2$, $\log_7 x = \sqrt{2}$, $x = 7^{\sqrt{2}}$ ir $\log_7 x = -\sqrt{2}$, $x = 7^{-\sqrt{2}}$;

d) $10^{\sqrt{2}}$ ir $10^{-\sqrt{2}}$.

**164.** *Pastaba.* Sprendžiant šias lygtis, reikia atkreipti dėmesį į tai, kad logaritmo pagrindas turi būti teigiamas ir nelygus vienetui skaičius, o pologaritminis reiškinys — teigiamas.

a) $\log_{x+1} 9 + \log_{x+1} 4 = 2$; $\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0; \end{cases}$

$(x+1)^2 = 36$, $x_1 = 5$, $x_2 = -7$ (netinka).

*Atsakymas.* a) 5; b) $-1\frac{1}{4}$; c) 3; d) 3; e) 3; f) 3; g) 4; h) 5.

**165.** a) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5, \\ \log_2 x - \log_2 y = 3. \end{cases}$ Sudėję lygtis, gauname: $2\log_2 x = 8$, $\log_2 x = 4$, $x = 16$. Tada $\log_2 y = 5 - \log_2 x = 5 - 4 = 1$ ir $y = 2$.

*Atsakymas.* (16; 2).

b) $(10^6; 10)$; c) $(10; 100)$;

d) $\begin{cases} \lg x - \lg y = -2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$ Iš antrosios lygties išreiškę $y = x^3$ ir įstatę į pirmąją, gausime: $\lg x - \lg x^3 = -2$, $\lg x - 3\lg x = -2$, $-2\lg x = -2$, $\lg x = 1$, $x = 10$; $y = 1000$.

*Atsakymas.* (10; 1000).

**166.** *Nurodymas.* Norint surasti, kada funkcijos reikšmės lygios nuliui, reikia išspręsti lygtį $f(x) = 0$.

a) $\lg 35 + \lg(2x-6) - \lg 3{,}5 = 0$, $\lg\big(35(2x-6)\big) = \lg 3{,}5$, $70x - 210 = 3{,}5$, $x = 3{,}05$;

b) $-1$; c) $31{,}25$; d) 1400.

**167.** *Nurodymas.* Norint rasti funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų susikirtimo taškų abscises, reikia išspręsti lygtį $f(x) = g(x)$.

a) 9; b) 6 ir 14;

c) $3^{\lg x} - 6 = 3^{\lg x - 1}$, $3^{\lg x} - 6 = 3^{\lg x}\cdot 3^{-1}$, $3^{\lg x} - \frac{1}{3}\cdot 3^{\lg x} = 6$, $3^{\lg x} = 9$, $\lg x = 2$, $x = 100$;

d) 100.

**168.** *Nurodymas.* Lygtis patogu spręsti pakeičiant nežinomąjį.

a) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$, $\lg x = a$, $\frac{1}{5-a} + \frac{2}{1+a} = 1$, $a = 2$ ir $a = 3$. Tada $\lg x = 2$, $x = 100$ ir $\lg x = 3$, $x = 1000$;

b) 10 ir $10^{\frac{1}{2}}$;

c) $\lg(3^x - 1) + \lg(3^x - 2) = 1 - \lg 5$,
$\lg\big((3^x - 1)\cdot(3^x - 2)\big) = \lg 2$,
$(3^x - 1)(3^x - 2) = 2$.
Pakeitę nežinomąjį gauname:
$3^x = m$, $(m-1)(m-2) = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 0$.
Tada $3^x = 3$, $x = 1$; lygtis $3^x = 0$ sprendinių neturi. Taigi $x = 1$;

d) 2.

# 13.5. Logaritminės nelygybės

Logaritminių nelygybių sprendimas iliustruojamas dviem brėžiniais. Kad logaritminių nelygybių sprendimas netaptų formaliu algoritmo taikymu (keičiame nelygybės ženklą ar jo nekeičiame, prirašome apibrėžimo sritį nusakančią nelygybę ar jos neprirašome), verta kelis paprastus nelygybių sprendimo pavyzdžius pateikti braižant atitinkamus funkcijų grafikus ir nurodant brėžiniuose sprendinių aibes.
Dar kartą galima priminti, kaip bet koks skaičius gali būti užrašytas kaip logaritmas nurodytu pagrindu. Keturi tekste pateikti pavyzdžiai apima paprasčiausius ir dažniausiai pasitaikančius logaritminių nelygybių pavyzdžius. Visus juos verta panagrinėti.

***Žinome:***
kokie yra paprasčiausių logaritminių nelygybių sprendiniai;
kaip sprendinius galima pavaizduoti grafiškai.

***Mokame*** pertvarkyti sudėtingesnes logaritmines nelygybes į paprastesnes ir teisingai nurodyti pastarųjų sprendinius.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Paprastų logaritminių nelygybių pavyzdžių pateikta 169–171 pratimuose. Svarbu, kad visi gerai išmoktų jas spręsti. Iš 173 pratimo a)–d) dalių galima atrinkti nelygybes namų užduotims ar savarankiškiems darbams.

**169.** a) $\log_5(3x+7) \geqslant \log_5(2x+4)$, $\begin{cases} 3x+7 \geqslant 2x+4, \\ 2x+4 > 0, \end{cases}$ $x > -2$;

b) $\log_4(x-2) < \log_4(6-x)$, $\begin{cases} x-2 < 6-x, \\ x-2 > 0, \end{cases}$ $2 < x < 4$;

c) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$, $\begin{cases} 2x-5 \geqslant 3x+1, \\ 3x+1 > 0, \end{cases}$ sprendinių nėra;

d) $1 < x < 7$; e) $x > \frac{1}{2}$;

f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}(3+x) > \log_{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}(2+x)$.
Pirmiausiai įsitikinkime, kad pagrindas didesnis už 1: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 > 1$.
Sprendžiame sistemą: $\begin{cases} 3+x > 2+x, \\ 2+x > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 0x > -1, \\ x > -2, \end{cases}$ $x > -2$.

**170.** a) **D**; b) **C**.

**171.** a) $1 < x \leqslant 10$; b) $x > -\frac{4}{9}$; c) $x \leqslant -30$; d) $x < -\frac{1}{20}$; e) $x \leqslant \frac{1}{3}$;
f) $\frac{1}{2} < x < 3$.

**172.** a) $f(x) = \log_{0,2}(x-4)$; $f(3-a) < f(7)$, kai $\log_{0,2}(-a-1) < \log_{0,2}3$.
Iš čia $-a-1 > 3$ ir $a < -4$;
b) $-4 < b < 5$.

**173.** a) $-7 < x < 2$; $x < -1$ ir $x > 4$; $0,5 < x \leqslant 4,5$; $x > 200$;
b) $-1 \leqslant x < 3$; $x < -\frac{1}{2}$ ir $x > 2$; $2 < x < 2,5$; $0,4 < x < 0,9$;
c) $x \geqslant 5$; $-11 < x < 1$ ir $x > 9$; $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$; $x > 7,5$;
d) $x \geqslant -\frac{1}{2}$; $-4 < x < \frac{1}{2}$; $-10 < x \leqslant 2$ ir $x \geqslant 10$; $1 < x < 2$ ir $2 < x < 3$;
e) $0 < x < 1$; $0 < x < 1$; $1 < x < 3$;
$\log_x(3-2x) < 2$, $\log_x(3-2x) < \log_x x^2$. Nelygybę keičiame dviem nelygybių sistemomis:

1) $\begin{cases} 3-2x < x^2, \\ 3-2x > 0, \\ x > 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2x-3 > 0, \\ x < 1,5, \\ x > 1; \end{cases}$ $1 < x < 1,5$;

2) $\begin{cases} 3-2x > x^2, \\ 3-2x > 0, \\ 0 < x < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2x-3 < 0, \\ x < 1,5, \\ 0 < x < 1; \end{cases}$ $0 < x < 1$.

Taigi $1 < x < 1,5$ ir $0 < x < 1$;
f) $-1 < x < 1$ ir $3 < x < 5$; $x \leqslant -1$ ir $x \geqslant 4$; $x < 2$ ir $x > 3$;
$-2 \leqslant x < -1$ ir $6 < x \leqslant 7$.

**174.** $3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant \frac{1}{3}$, $3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant 3^{-1}$, $\log_{0,25}(1-x) \geqslant -1$,
$\log_{0,25}(1-x) \geqslant \log_{0,25} 4$,
$\begin{cases} 1-x > 0, \\ 1-x \leqslant 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -3. \end{cases}$
Sveikieji sprendiniai yra $-3$, $-2$, $-1$ ir 0.
Jų suma lygi: $-3 + (-2) + (-1) + 0 = -6$.

**175.** Nelygybės $\log_{\frac{1}{2}}(5-x) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ sprendiniai yra $-1 < x \leqslant 2$. Didžiausia $x$ reikšmė, tenkinanti duotą nelygybę, yra $x = 2$.

**176.** a) $f(2) = 1$; b) $(2{,}5; 0)$ c) $\frac{4-x}{x-1} > 0$, $1 < x < 4$;
d) $f(x) = 0$, kai $x = 2{,}5$; e) $f(x) > 0$, kai $\frac{4-x}{x-1} > 1$, $1 < x < 2{,}5$.

**177.** a) $x^2 - 6x + 8 > 0$, $x < 2$ ir $x > 4$;
b) $f(1) + f(5) = 1 + 1 = 2$;
c) $f(x) = 1$, tai $x^2 - 6x + 8 = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$;
d) $1 < x < 2$ ir $4 < x < 5$.

**178.** a) $x^2 - 7x + 10 > 0$, $x < 2$ ir $x > 5$;
b) $f(1) - f(6) = -2 - (-2) = 0$;
c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 7x + 10) = -2$, $x^2 - 7x + 6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 1$. Taigi funkcijos $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 7x + 10)$ grafikas kerta tiesę $y = -2$ taškuose $(6; -2)$ ir $(1; -2)$;
d) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - \left(\frac{1}{4}\right)^{f(x)} > 0$,
$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-7x+10)} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-7x+10)} > 0$,
$4 \cdot (x^2 - 7x + 10) - (x^2 - 7x + 10)^2 > 0$,
$(x^2 - 7x + 10)(4 - x^2 + 7x - 10) > 0$,
$(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 6) < 0$,
$(x-2)(x-5)(x-6)(x-1) < 0$,
$1 < x < 2$ ir $5 < x < 6$.

# 14. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

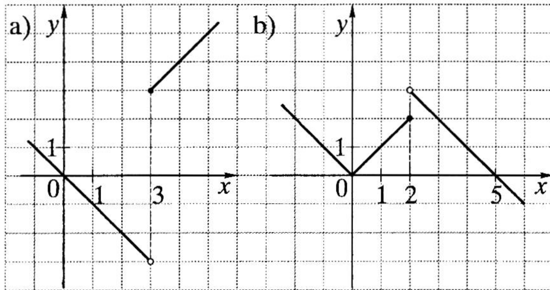
**2.** a) 1) $a = 2$, $b = 1$; b) 1) $a = -3$, $b = -1$.

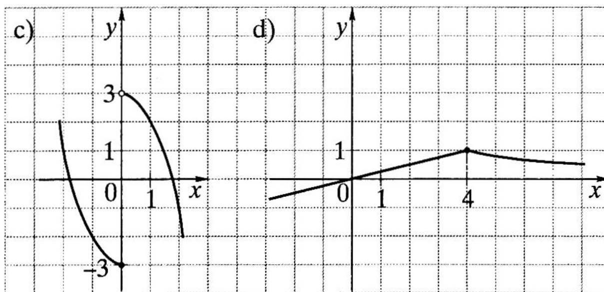
**3.** a) $x \neq -3$; b) $x \neq -4$ ir $x \neq 4$; c) $x \in \boldsymbol{R}$; d) $x > 0$;
e) $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$; f) $[0; 6]$; g) $x \geqslant -1$, $x \neq 0$, $x \neq 3$;
h) $x \geqslant 1$, $x \neq 17$.

**4.** a) $-4\frac{1}{3} < x < -1$; b) $1 \leqslant x \leqslant 2{,}5$.
*Nurodymas.* Sprendžiame dvigubąją nelygybę:
a) $-5 < 3x + 8 < 5$; b) $-1 \leqslant 2x - 3 \leqslant 2$.

**5.** a) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; b) $\left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$; c) $\left(-\infty; 6\frac{1}{5}\right)$; d) $\left[-6\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

**6.**




**7.** a) $x \neq 4$; b) $f(-10) = \frac{3}{7}$, $f(0) = -1$, $f(0{,}6) = -1\frac{6}{17}$;
c) $f(-4) = 0$, $f(2) = -3$, $f(-9\frac{1}{3}) = \frac{2}{5}$.

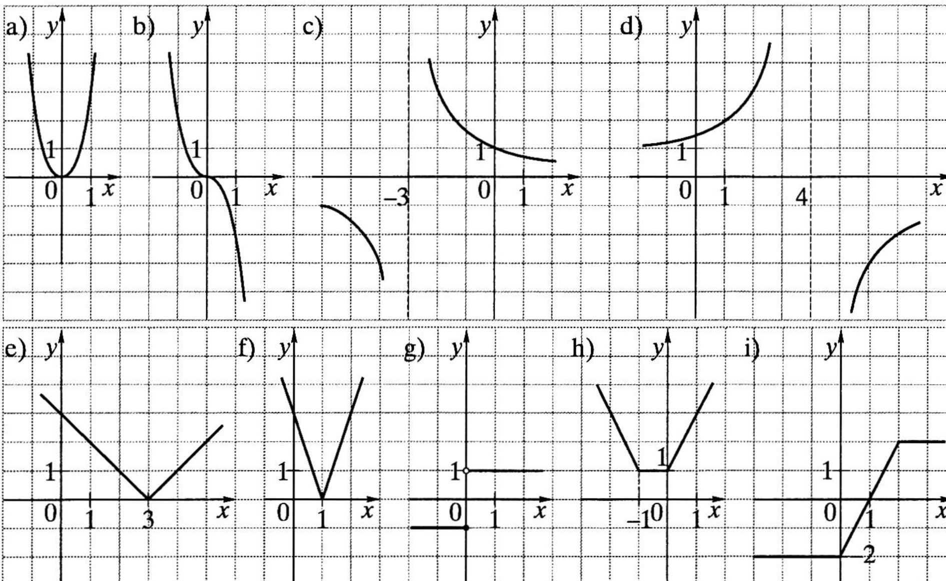
**8.** a) $x \geqslant 0$ ir $x \neq 2$; b) $f(0{,}25) = -\frac{2}{7}$, $f(16) = \frac{2}{7}$, $f(20) = \frac{\sqrt{5}}{9}$;
c) $f(0) = 0$, $f(4) = 1$, $f(9) = \frac{3}{7}$.

**9.** a) $-1$; b) $1$; c) $-1$; d) $\frac{1}{510}$.

**10.** a) $32 + 0{,}6$; b) $0 + 0{,}15$; c) $-9 + 0{,}7$; d) $-1 + 0{,}66$.

**11.** 4 nariai.

**12.**



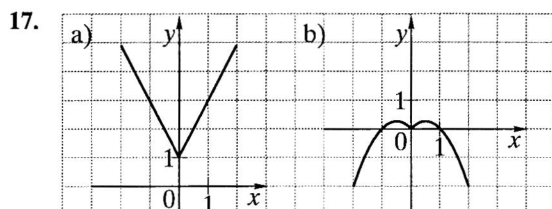
**13.** a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; b) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$; d) $y = \sqrt[3]{\frac{x}{3}}$;
e) $y = \frac{x}{x-4}$; f) $y = \frac{1}{1-3x}$.

**14.** a) $-5$ ir 5; b) $-8$ ir 6; c) tokių $x$ reikšmių nėra; d) 1;
e) tokių $x$ reikšmių nėra; f) $-5$.

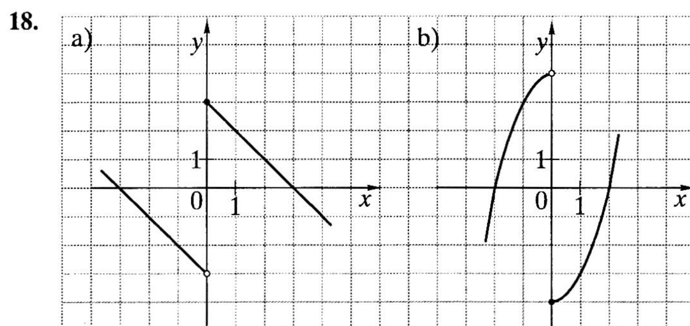
**15.** a) $f(3{,}5) < f(-4{,}2)$; b) $g(3{,}5) > g(-4{,}2)$; c) $f(-7) > g(-7)$;
d) $g(-4) < f(-3)$; e) $f\left(-\frac{15}{16}\right) < g\left(\frac{16}{15}\right)$; f) $f\left(-1\frac{1}{3}\right) < g\left(1\frac{7}{15}\right)$.

**16.** a) ir f) — lyginė; b) nelyginė; c), d) ir e) — nėra nei lyginė, nei nelyginė.

**17.**




**18.**




**19.** a) $x = -\sqrt[6]{10}$, $x = \sqrt[6]{10}$, $\sqrt[6]{10} \approx 1{,}5$;
b) $x = -\sqrt[6]{2}$, $x = \sqrt[6]{2}$, $\sqrt[6]{2} \approx 1{,}1$;
c) lygtis sprendinių neturi; d) $[-\sqrt[6]{10}; \sqrt[6]{10}]$;
e) $(-\infty; -\sqrt[6]{2}) \cup (\sqrt[6]{2}; +\infty)$; f) $x \in \boldsymbol{R}$.

**20.** a) $x = \sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}4$; b) $x = -\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}7$;
c) $x = -\sqrt[3]{0{,}5}$, $\sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}8$; d) $(\sqrt[3]{3}; +\infty)$; e) $(-\infty; -\sqrt[3]{5})$; f) $(-1; +\infty)$.

**21.** a) 5 ir $-5$; $[-5; 0) \cup [5; +\infty)$; b) lygtis sprendinių neturi; $x < 0$.

**22.** a) $E_f = \left[\frac{27}{100}; 27\right]$, $E_g = \left[\frac{3}{100}; 3\right]$; b) $E_f = \left[\frac{81}{10\,000}; 81\right]$, $E_g = \left[\frac{27}{1000}; 27\right]$.

**23.** a) $\sqrt[5]{5}$, $4\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[4]{4x}$; b) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^7y^7}}$, $\sqrt[5]{(x+y)^7}$, $\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$;
c) $\sqrt[3]{ab}$, $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, $b\sqrt[3]{a}$; d) $\sqrt[5]{m^2}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{z^{16}}}$.

**24.** a) $34^{\frac{1}{2}}$, $5a^{\frac{1}{5}}$, $-\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$; b) $5(a+6)^{-\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{6}}$, $(a+b)^{\frac{9}{7}}$.

**25.** a) $[0; 4]$; b) $[1;9]$; c) $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$.

**26.** a) $[0; 2]$; b) $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$; c) $[1; 3]$.

**27.**

| Funkcija | Apibrėžimo sritis | Reikšmių sritis | Lyginumas | Didėjimo intervalai | Mažėjimo intervalai |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x^{-5}$ | $x \neq 0$ | $y \neq 0$ | nelyginė | — | $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ |
| $f(x) = x^{-\frac{1}{5}}$ | $x > 0$ | $y > 0$ | nėra nei lyginė, nei nelyginė | — | $(0; +\infty)$ |
| $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ | $x > 0$ | $y > 0$ | nėra nei lyginė, nei nelyginė | $(0; +\infty)$ | — |
| $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$ | $x > 0$ | $y > 0$ | nėra nei lyginė, nei nelyginė | $(0; +\infty)$ | — |
| $f(x) = -x^{-5}$ | $x \neq 0$ | $y \neq 0$ | nelyginė | $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ | — |

**28.** a) 1;
b) lygtis sprendinių neturi. *Pastaba.* Dar kartą su moksleiviais prisiminkite, kad laipsnis su racionaliuoju rodikliu apibrėžiamas tik teigiamiems $x$. Todėl $x = -1$ nėra lygties $x^{-\frac{1}{3}} = -1$ sprendinys (analogiškai punkte c) $x = -243$ nėra duotosios lygties sprendinys);
c) lygtis sprendinių neturi; d) 625; e) $\frac{2}{3}$; f) 2,0736.

**29.** a) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{1-a^{\frac{1}{2}}}$; b) $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; c) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$; d) $\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$.

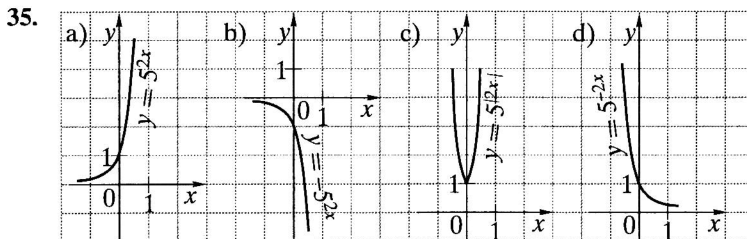
**30.** a) 4; b) lygtis sprendinių neturi; c) 1, 2; d) −2, 0, 1, 2; e) 3; f) lygtis sprendinių neturi.

**31.** a) (25; 36); b) sistema sprendinių neturi; c) (100; 25); d) (81; 9).

**33.** a) $f(0) = 1$, $f(-1) = \frac{1}{9}$, $f(1) = 1$; b) $f(0) = 1$, $f(2) = \frac{1}{16}$, $f(3) = 1$.

**34.** a) $D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, $E_f = (0; 1) \cup (1; +\infty)$;
b) $D_f = [-1; +\infty)$, $E_f = (0; 1]$;
c) $D_f = [-3; 3]$, $E_f = \left[\frac{1}{8}; 1\right]$;
d) $D_f = (0; +\infty)$, $E_f = (0; 1)$.

**35.**




Funkcijos $f(x)$ savybės:
a) $D_f = \boldsymbol{R}$, $E_f = (0; +\infty)$, funkcija didėja;
b) $D_f = \boldsymbol{R}$, $E_f = (-\infty; 0)$, funkcija mažėja;
c) $D_f = \boldsymbol{R}$, $E_f = [1; +\infty)$, intervale $(-\infty; 0)$ funkcija mažėja, intervale $(0; +\infty)$ funkcija didėja;
d) $D_f = \boldsymbol{R}$, $E_f = (0; +\infty)$, funkcija mažėja.

**36.** a) *Nurodymas.* Skaičius pirmiausiai užrašykite kaip laipsnius pagrindu 3: $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$, $3\sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}}$.

**37.** a) 8; b) 9; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{3}{16}$.

**38.** a) $8^2 - 8^3 - 8 = 8 \cdot (8 - 8^2 - 1) = -8 \cdot 57 = -8 \cdot 3 \cdot 19$ — dalijasi iš 19;
b) *Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Turi būti: „Įrodykite, kad $2^7 - 2^5 - 2^4$ dalijasi iš 5“. Tada
$2^7 - 2^5 - 2^4 = 2^4 \cdot (2^3 - 2 - 1) = 2^4 \cdot 5$ — dalijasi iš 5;
c) $5^{n+3} - 2^{n+3} + 5^n - 2^n = (5^{n+3} + 5^n) - (2^{n+3} + 2^n) = 5^n \cdot (5^3 + 1) - 2^n \cdot (2^3 + 1) = 126 \cdot 5^n - 9 \cdot 2^n = 9 \cdot (14 \cdot 5^n - 2^n)$ — dalijasi iš 9;
d) $10^{n+2} - 4^n - 10^n + 4^{n+2} = (10^{n+2} - 10^n) + (4^{n+2} - 4^n) =$
$10^n \cdot (10^2 - 1) + 4^n(4^2 - 1) = 99 \cdot 10^n + 15 \cdot 4^n =$
$10 \cdot 99 \cdot 10^{n-1} + 4 \cdot 15 \cdot 4^{n-1} = 10 \cdot (99 \cdot 10^{n-1} + 6 \cdot 4^{n-1})$ — dalijasi iš 10.

**39.** a) 1; b) lygtis sprendinių neturi; c) 0; d) 1.

**40.** a) 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{5}$, −3; b) −2, 4, $2\frac{1}{3}$, 3; c) $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 12 ir 5, $1\frac{1}{2}$;
d) 3, $1\frac{1}{2}$, 7 ir −1, 2,5.

**41.** a) (1; 5); b) (5; 32); c) (1; 41); d) (3; 15).

**42.** a) 3; b) 3; c) 2 ir 1; d) −2; e) 0 ir 1; f) 0 ir 1.

**43.** a) 2; b) 16; c) $\frac{3}{4}$; d) 0.

**44.** a) (2; 3), (3; 2); b) (3; −2).

**45.** a) $0 < a < 1$; b) $0 < a < 1$; c) $0 < a < 1$; d) $0 < a < 1$.

**46.** a) $x > 1{,}5$; $-1 < x < 3$ ir $x > 5$; $x > \frac{1}{3}$;
b) $x < 1{,}2$; $x < -2$ ir $1 < x < 2$; $x < \frac{4}{5}$.

**47.** a) $x > 3$, $x > \frac{2}{3}$, $0 < x < 1$, $x < 1$;
b) $x < 4$, $x < -\frac{1}{2}$ ir $x > \frac{1}{2}$, $x < 1$ ir $x > 6$, $x < 1\frac{1}{4}$;
c) $x > 2{,}5$, $x > -2$, $x < -1\frac{1}{2}$, $x < 3$;
d) $x > \frac{1}{4}$, $-2 < x < 0$, $1 < x < 5$, $x > 1$.

**48.** a) 1; $\sqrt{2}$; 9; $\frac{1}{36}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{125}$; $36\sqrt{2}$; c) 9; 2; 0,04; d) 0,04; $\frac{1}{27}$; 25.

**49.** $\frac{1}{4}$, $-4$, $1\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, $-6$, $-2\frac{2}{3}$.

**50.** a) $\log_{\frac{1}{2}} 5$; b) $\log_3 \frac{1}{2}$.

**51.** a) $3-3a$; b) $3-2a$.

**52.** a) $-6$; b) $-6$; c) 0; d) $6\frac{1}{4}$; e) 2003; f) 3.

**53.** a) $\lg 42 - \lg 3{,}5$; b) $2\lg 5$; c) $2\lg 11$; d) $\lg 19 - \lg 2$.

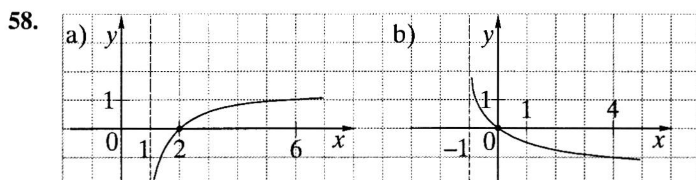
**54.** a) $y = \log_7 x - 2$; b) $y = \log_3 \frac{x}{10}$; c) $y = \log_5 x + 3$; d) $y = -\log_5 x - 4\frac{1}{2}$.

**55.** a) $2 + \log_9 x$; b) $\frac{1}{2} - \log_{81} x$; c) $3 - 3\log_{0,3} x$; d) $\frac{3}{2} + 2\lg x$.

**56.** a) $x > 3$; b) $x > 2$; c) $-1 < x < 1$; d) $x < -3$ ir $x > 3$;
e) $-1\frac{1}{2} < x < 5$; f) $x < -4{,}5$ ir $x > 2$.

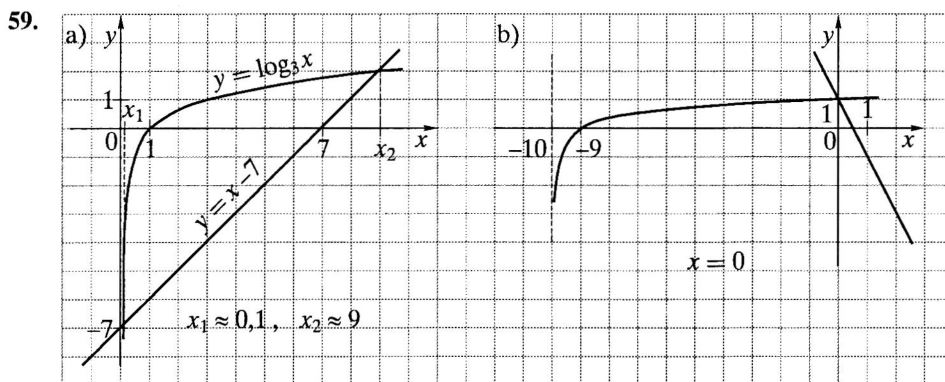
**57.** a) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; b) $\left(1\frac{1}{2}; +\infty\right)$; c) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; d) $(2; 5)$;
e) $[-1; 2) \cup (2; 5)$; f) $(-3; 1) \cup (1; 6]$.

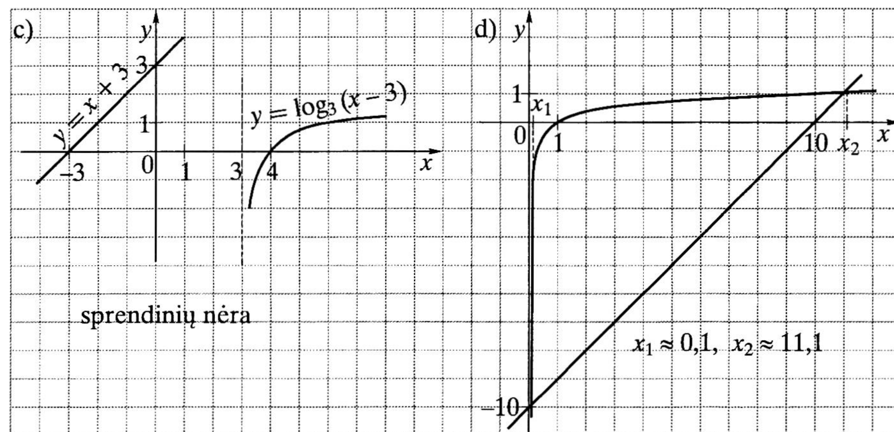
**58.**




Funkcijos $f(x)$ savybės:
a) $D_f = (1; +\infty)$, $E_f = (-\infty; +\infty)$, funkcija didėja;
b) $D_f = (-1; +\infty)$, $E_f = (-\infty; +\infty)$, funkcija mažėja.

**59.**




**60.** a) $x > 1$; b) $0 < x < 1$; c) $x > 5$; d) $0 < x \leqslant 1$.

**61.** a) $2 + 2\log_3 |x|$; $-3 + 3\log_3 a + \log_3 m$; $4 + \frac{1}{3}\log_3 y + 2\log_3 |x| + \log_3 a$;
$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log_3 a + \frac{1}{3}\log_3 b$;
b) $1 + 2\lg|a| + 3\lg y$; $-2 + \lg x + \frac{1}{5}\lg y$; $\frac{1}{2} + 3\lg a + 2\lg|y|$; $\frac{1}{2} + 5\lg x + 10\lg|y|$.

**62.** a) $\frac{19}{50}$; $\frac{1}{5}$; $-1\frac{3}{5}$; b) $-\sqrt{13\frac{1}{3}}$ ir $\sqrt{13\frac{1}{3}}$; $-\sqrt{14}$ ir $\sqrt{14}$; $-4$ ir 4; c) $-\frac{3}{2}$; $f(x) \neq 0$; $\frac{1}{2}$;
d) $-5\frac{5}{9}$; $f(x) \neq 0$; $\frac{5}{9}$.

**63.** a) $\frac{1}{36}$; b) 8; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{64}$; e) $5\frac{1}{16}$; f) 125.

**64.** a) 2, 3; b) lygtis sprendinių neturi; c) 6, 14; d) 6; e) 5; f) 4; g) 0; h) 1, $\sqrt{10}$.

**65.** a) (1; 1), (3; 9); b) $\left(\frac{1}{16}; -1\right)$.

**66.** a) (3; 0); b) (−9; 0), (−1; 0).

**67.** a) 2; b) lygtis sprendinių neturi; c) lygtis sprendinių neturi; d) 3.

**68.** a) 9; b) 8; c) 27; d) 9.

**69.** a) $-2\lg 2$; b) $\frac{\lg 6}{\lg 3{,}5}$; c) $\frac{\lg 7}{5\lg 2}$; d) $-\frac{\lg 3}{3\lg 5}$.

**70.** a) $(10^6; 10)$; b) (16; 10); c) (4,5; 0,5); d) (10; 9), (9; 10); e) (8; 6), (6; 8); f) (4; 2), (4; −2).

**71.** a) 5; b) 3; c) 3; d) 4.

**72.** a) $x > 4$; b) $x > -4\frac{15}{16}$; c) $-13 < x < 12$; d) $3 < x < 6$; e) $x < -2$ ir $x > 6$; f) $x < -3$ ir $x > 1\frac{2}{3}$; g) $0 < x < 1$; h) $0 < x < 1$; i) $1 < x < 2$; j) $x > 2$.

**73.** a) −1, 0, 1; b) 7, 8, 9.

**74.** a) $1 < x < 3$ ir $4 < x < 5$; b) $2 < x < 2\frac{1}{3}$ ir $x > 5$; c) $x < -3$ ir $x > 7$; d) $x < -1$ ir $x > 1$.

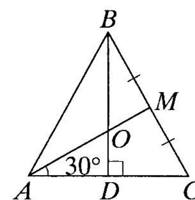
**75.** a) $x < 1$; b) $x < 0$.

**76.** a) Neturi; b), c), d) reiškiniai apibrėžti.

**77.** a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; b) $y = 2^x$; c) $y = 2^x - 1$; d) $y = 1 + \log_2 x$.

**78.** $D_f = (0; 1{,}5]$.

**79.** Nubrėžkime trikampio pusiaukraštines $AM$ ir $BD$. Jų susikirtimo tašką pažymėkime $O$. Pusiaukraštinė $BD$ yra ir trikampio $ABC$ aukštinė. Pagal trikampio pusiaukraštinių savybę turime: $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$ (cm). Tada $OM = 36 - 24 = 12$ (cm). Kadangi $OD$ — stačiojo trikampio $ADO$ statinis, esantis prieš 30° kampą, tai $OD = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ (cm). Tada $BD = 3OD = 12 \cdot 3 = 36$ (cm).




**80.** Pažymėkime ieškomąjį kampą $\alpha$.

a) Kampas $\alpha$ yra pirmame ketvirtyje, nes abi taško $A$ koordinatės teigiamos. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$.

b) Kampas $\alpha$ yra antrame ketvirtyje, nes taško $A$ koordinatė $y$ (sinusas) yra teigiama, o koordinatė $x$ (kosinusas) neigiama. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha = 180° - 30° = 150°$.

**81.** $2\sin 135° + 4\cos 150° - 3\operatorname{tg} 120° =$
$2\sin(180° - 45°) + 4\cos(180° - 30°) - 3\operatorname{tg}(180° - 60°) =$
$2\sin 45° - 4\cos 30° + 3\operatorname{tg} 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

**82.** Pritaikę trikampio ploto formulę, kai žinomos dvi trikampio kraštinės ir kampas tarp jų, randame, kad $AC = 4$ cm.

**83.** Remiamės trikampio ploto formule, kai žinomos dvi trikampio kraštinės ir kampas tarp jų. Kadangi lygiagretainio įstrižainė dalija jį į du lygius trikampius, tai $S_{\text{lygiagretainio}} = ab\sin A$.

**84.** Trikampiams $ABD$ ir $CBD$ taikome sinusų teoremą: $\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta}$; $\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(180°-\beta)}$, $\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin\beta}$.
Lygybę $\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta}$ padaliję iš lygybės $\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin\beta}$, gauname: $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$.

**85.** Pritaikę Herono formulę, turime, kad $S_{\triangle ABC} = 84$. Remdamiesi formule $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\alpha$, randame $\sin\alpha = \frac{2S}{AB \cdot AC} = \frac{2 \cdot 84}{13 \cdot 14} = \frac{12}{13}$.

**86.** *Nurodymas.* Taikykite sinusų teoremą.
*Atsakymas.* $\sin B = \frac{2}{3}$.

**87.** Iš formulės $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ išsireiškę $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$ ir įstatę į formulę $S_{\triangle} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, gausime: $S_{\triangle} = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

**88.** Duotųjų trikampio kraštinių sudarytą smailųjį kampą pažymėkime $\alpha$. Tada $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin\alpha = 20 \sin\alpha$. Kadangi $S_{\triangle} = 12\,\text{cm}^2$, tai $20\sin\alpha = 12$ ir $\sin\alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Kadangi $0° < \alpha < 90°$, tai $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Pritaikę kosinusų teoremą randame, kad trečiosios trikampio kraštinės ilgis yra 5 cm.

**89.** *Nurodymas.* Iškilojo $n$-kampio kampų suma lygi $180°(n-2)$.
a) 900°; b) 1260°.

**90.** *Nurodymas.* Taisyklingojo $n$-kampio kiekvieno kampo didumas lygus $\frac{180°(n-2)}{n}$.
a) $n = 12$; b) $n = 15$.

**91.** $P = 2(9 + 25) = 68\,(\text{cm})$ arba $P = 2(16 + 25) = 82\,(\text{cm})$.

**92.** Pažymėkime trumpesniosios lygiagretainio kraštinės ilgį $x$. Tada ilgesniosios kraštinės ilgis yra $2x$. Sprendžiame lygtį: $2(x + 2x) = 90$, $x = 15\,(\text{cm})$; $2x = 30\,\text{cm}$.
*Atsakymas.* 15 cm ir 30 cm.

**93.** Kadangi $AB = CD$ (lygiagretainio priešingosios kraštinės) ir $BM = DN$ (duota), be to, $AB + BM = AM$ ir $CD + DN = CN$, tai $AM = CN$. Kadangi $ABCD$ lygiagretainis, tai $AB \parallel CD$. Vadinasi, ir $AM \parallel CN$. Keturkampis $AMCN$, kurio dvi priešingosios kraštinės lygios ir lygiagrečios, yra lygiagretainis.

**94.** *Nurodymas.* Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$ yra stačiakampis. Vadinasi, $AB = DC$.

**95.** *Nurodymas.* Lygiagretainio kampų prie vienos kraštinės suma lygi 180°. Todėl lygiagretainio vidaus kampų prie vienos kraštinės pusiaukampinės susikerta statmenai.

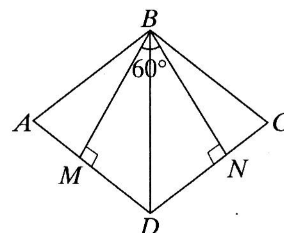
**96.** *Nurodymas.* Nubrėžkite keturkampio įstrižainę ir remkitės trikampio vidurinės linijos savybe.

**97.** $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6\,(\text{cm})$, nes $CD$ — statinis, esantis prieš 30° kampą.
Tada $AD = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\,(\text{cm})$;
$P = 2(6\sqrt{3} + 6) = 12(\sqrt{3} + 1)\,(\text{cm})$; $S = 6\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$.

**98.** a) Smailusis rombo kampas lygus $180° - 120° = 60°$. Kadangi rombo įstrižainės yra ir rombo kampų pusiaukampinės, tai trumpesnioji rombo įstrižainė dalija rombą į du lygiakraščius trikampius. Taigi rombo kraštinė lygi trumpesniajai įstrižainei ir lygi 20 cm. Tada $P = 4 \cdot 20 = 80\,(\text{cm})$.
b) Ilgesnioji rombo įstrižainė lygi $2\sqrt{20^2 - 10^2} = 20\sqrt{3}\,(\text{cm})$.

**99.** Trumpesnioji rombo įstrižainė dalija rombą į du trikampius. Kadangi trikampio aukštinė yra ir pusiaukraštinė, tai trikampis yra lygiašonis. Vadinasi, rombo kraštinė lygi jos trumpesniajai įstrižainei, t. y. 2 dm. Tada $P = 2 \cdot 4 = 8\,(\text{dm})$.

**100.** a) Trikampiai $BMD$ ir $BND$ — statieji. $BM = BN$ — rombo aukštinės, $BD$ — bendra, tai $\triangle BMD = \triangle BND$ (pagal statinį ir įžambinę). Vadinasi, $\angle MBD = \angle NBD = 30°$, $\angle BDM = 60°$.
Tada $\angle ABC = \angle ADC = 120°$, $\angle A = \angle C = 60°$.
b) $\triangle ABD$ yra lygiagraštis, o jo aukštinė $BM = \frac{AD\sqrt{3}}{2}$. Tada $\frac{AD\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ir $AD = 4\,\text{dm}$. $S_{\text{rombo}} = AD \cdot BM = 4 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\,(\text{dm}^2)$.




**101.** Kvadrato įstrižainės yra lygios, susikerta statmenai ir dalija viena kitą pusiau. Todėl antrojo kvadrato kraštinės ilgis yra 5 cm.

**102.** Taškai $A$, $B$ ir $C$ apibrėžia 9 skirtingus vektorius: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ ir $\overrightarrow{CC}$.
*Pastaba.* Šis pratimas vadovėlyje kartojasi (žr. psl. 89, Nr. 8). Moksleiviams vietoj šio pratimo galima rekomenduoti spręsti tokį: „Plokštumoje pažymėti 3 skirtingi taškai $A$, $B$ ir $C$. Kiek skirtingų nelygių vektorių apibrėžia šie taškai?"
*Atsakymas.* 7, kai taškai yra vienoje tiesėje ir atstumai nuo vidurinio taško iki kitų dviejų yra skirtingi, arba kai šie taškai nėra vienoje tiesėje; 5, kai trys taškai yra vienoje tiesėje ir vienas taškas yra vienodai nutolęs nuo kitų dviejų.

**103.** a) $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NK}$ ir $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{NM}$ ir $\overrightarrow{KM}$;
b) $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{NK}$.

**104.** a) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{XY}$; b) $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{OT}$; c) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{UV}$.
Lygūs vektoriai: $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{PQ}$ ir $\overrightarrow{EF}$.

**105.** Lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis yra $a$, pusiaukraštinė lygi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tada $|\overrightarrow{AM}| = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 6\,(\text{cm})$; $|\overrightarrow{CO}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{CN}| = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4\,(\text{cm})$;
$|\overrightarrow{MO}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2\,(\text{cm})$; $|\overrightarrow{NM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,(\text{cm})$.

**106.** $|\overrightarrow{DC}| = 4\,(\text{cm})$; $|\overrightarrow{ED}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5\,(\text{cm})$;
$|\overrightarrow{EA}| = |\overrightarrow{ED}| = 5\,(\text{cm})$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2+6^2} = 2\sqrt{13}\,(\text{cm})$.

**107.** $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$.

**108.** a) Kadangi $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$, tai $|\overrightarrow{KL}| = |\overrightarrow{NM}|$ ir $\overrightarrow{KL} \upuparrows \overrightarrow{NM}$. Vadinasi, keturkampio $KLMN$ kraštinės $KL$ ir $NM$ yra lygios ir lygiagrečios. Toks keturkampis yra lygiagretainis.
b) Kadangi $\overrightarrow{LM}$ ir $\overrightarrow{KN}$ — kolinearūs, tai $LM \parallel KN$; kadangi $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{NM}$ — nekolinearūs, tai $KL \nparallel NM$. Keturkampis, kurio dvi priešingos kraštinės yra lygiagrečios, o kitos dvi nelygiagrečios, vadinamas trapecija.

**109.** a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BD}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$.

**110.** a) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$;
c) $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

**111.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{f}$; $\vec{f} + \vec{g} = \vec{e}$; $\vec{f} - \vec{a} = \vec{b}$; $\vec{c} - \vec{g} = \vec{d}$; $\vec{e} + \vec{d} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{e} - \vec{f} = \vec{g}$;
$\vec{f} + \vec{g} + \vec{d} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \overrightarrow{BE}$.

**112.** a) $\overrightarrow{KM} = \vec{k} + \vec{l}$, $\overrightarrow{MK} = -\vec{k} - \vec{l}$;
b) $\overrightarrow{NK} = -\vec{k} - \vec{l} - \vec{m}$, $\overrightarrow{KN} = \vec{k} + \vec{l} + \vec{m}$;
c) $\overrightarrow{LN} = \vec{l} + \vec{m}$, $\overrightarrow{NL} = -\vec{l} - \vec{m}$.

**113.** a) $(\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XZ}) + (\overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZY}) = (\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}) + (\overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZY}) = \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{XY}$;
b) $(\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{YZ}) - (\overrightarrow{ZT} + \overrightarrow{XT}) + (\overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{ZT}) = \overrightarrow{XY} - \overrightarrow{YZ} - \overrightarrow{ZT} - \overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TY} =$
$(\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{XT}) + (\overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{ZT}) + \overrightarrow{TY} = \overrightarrow{TY} + \overrightarrow{TY} + \overrightarrow{TY} = 3\overrightarrow{TY}$.

**114.** a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$;
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DE}$;
Kadangi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$, tai $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$. Vadinasi,
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC}$.

**115.** Tegul $O$ — taisyklingojo šešiakampio centras.
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \vec{b} + \vec{b} = 2\vec{b}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$;
$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}$;
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{b} - \vec{a}$.

**116.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$.
Abi lygybes panariui sudedame:
$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$, $2\overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \vec{0}$;
$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

**117.** a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$;
d) $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$.

**119.** a) $2\vec{x} + \vec{a} = 3\vec{a}$, $2\vec{x} = 2\vec{a}$, $\vec{x} = \vec{a}$; b) $\vec{x} + \vec{a} - \vec{b} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

**120.** a) $2(\vec{a} + \vec{b}) - 3(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{b} = -\vec{a} + 5\vec{b}$;
b) $(\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} + \vec{y}) - 2\vec{y} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{x} + \vec{y} - 2\vec{y} = 2\vec{x}$.

**121.** $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$;
$\frac{2}{3}\overrightarrow{OM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$; $2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$; $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

**122.** A.

**123.** $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

**124.** Sakykime, kad pradinio indėlio dydis yra $a$ Lt. Kadangi per 20 metų indėlis padvigubėja, tai $2a = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20}$, $p \approx 3{,}5\%$.

**125.** Kadangi padaręs 15 reisų pirmasis automobilis pervežtų 75% viso krovinio, tai padaręs 5 reisus jis pervežtų 25% viso krovinio, o vienu reisu pervežtų 5% viso krovinio. Antrasis automobilis padaręs 5 reisus perveža $100\% - 25\% = 75\%$, o vienu reisu perveža $75 : 5 = 15\%$ viso krovinio. Taigi pirmasis automobilis perveža trigubai mažesnį krovinį.

**126.** Sakykime, kad pradinis darbo našumas yra $A$. Kadangi per 7 metus darbo našumas padvigubėja, tai $2A = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^7$, $p \approx 10{,}41\%$. Kad darbo našumas per 7 metus patrigubėtų, kasmet jį reikėtų padidinti maždaug 16,99%.

**127.** Kad skaičius $\overline{23xy}$ dalytųsi iš 45, jis turi dalytis ir iš 5, ir iš 9. Iš 5 duotasis skaičius dalysis, jei $y = 0$ arba $y = 5$. Iš 9 duotasis skaičius dalysis, kai iš 9 dalysis jo skaitmenų suma $5 + x + y$. Kai $y = 0$, tai $5 + x$ dalysis iš 9 su $x = 4$. Kai $y = 5$, tai $5 + x + 5$ dalysis iš 9 su $x = 8$. Taigi ieškomas skaičius yra 2340 arba 2385.

**128.** $10x + y = 6(x + y) \Rightarrow 4x = 5y \Rightarrow y = 0{,}8x$; $x + y = 1{,}8x$; $10y + x = 9x$; $9x : (1{,}8x) = 5$. Beje, toks sprendimas formalus, ir reikėtų įsitikinti, kad tokių skaičių esama. Kadangi $4x = 54$, tai skaitmuo $x \neq 0$ dalijasi iš 5, todėl lygus 5. Taigi vienintelis skaičius 54 tenkina uždavinio sąlygą.
*Atsakymas.* 5.

**129.** a) $0,(142857)$; b) $0,(81)$; c) $0,(307692)$; d) $0{,}41(6)$.

**130.** a) $\frac{13}{99}$; b) $-\frac{40}{33}$; c) $\frac{37}{30}$; d) $-\frac{3181}{990}$.

**131.** a) $\frac{5}{13}$; b) $0,(172)$; c) $\sqrt{3}+3$; d) $-\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

**132.** a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6} = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6} = 2 + 3 = 5$.
b) Pirmas dėmuo lygus $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{6-4\sqrt{2}}$, taigi turime reiškinį $\sqrt{6-4\sqrt{2}}\cdot(1+3+2\sqrt{2}) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1) =$ $4\sqrt{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)^2} = 4\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 4$.

**133.** a) $\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{3}$; c) 98; d) $-\frac{2}{x}$; e) $2\sqrt{x}$; f) $1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$; g) $-\sqrt{a}$; h) $-\frac{1}{m}$.

**134.** a) $-\frac{1}{8}$; b) $0{,}1(\sqrt{5}-5)$; c) $-\left(\frac{a}{b}\right)^2$; d) $\frac{1}{6}$.

**135.** *Nurodymas.* Teigiami reiškiniai lygūs tik tuomet, kai jų kvadratai lygūs.

**136.** Reikia įrodyti tapatybę $\frac{x^2-1}{x^2-x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1} = \frac{(x^2-1)^3}{(x^2-x+1)^3} + \frac{(2x-1)^3}{(x^2-x+1)^3}$, arba tapatybę $(x^2-1)(x^2-x+1)^2 - (x^2-1)^3 = (2x-1)^3 - (2x-1)(x^2-x+1)^2$. Kiekvieną tapatybės pusę nesunku išskaidyti tiesiniais dauginamaisiais, ir gauname tą patį skaidinį.

**137.** *Nurodymas.* Duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybei $(a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-b)^2 > 0$, bet tai pastebėti sunkoka. Galima reiškinyje $a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b = a^2 - a(b+1) + 1 - b + b^2$ laikyti $a$ kintamuoju („iksu") ir išskirti pilnąjį kvadratą.

**138.** Per 30 dienų ir per 60 dienų.

**139.** 30 km/h, 50 km/h.

**140.** Pažymėję vieno gabaliuko masę $x$, gauname lygtį: $2x^2 - 2px + p^2\left(1 - \frac{1}{k}\right) = 0$. Kad lygtis turėtų sprendinių, turi būti $D = 4p^2\left(\frac{2}{k} - 1\right) \geqslant 0$, t. y. $k \leqslant 2$ (t. y. dalijant kaina negali sumažėti daugiau kaip dukart). Gabaliukų masės lygios $\frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right)$ ir $\frac{p}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right)$ ir teigiamos, todėl $\sqrt{\frac{2}{k} - 1} < 1$, $\frac{2}{k} - 1 < 1$, $\frac{2}{k} < 2$, o kadangi $k > 0$, tai $k > 1$.
*Atsakymas.* Sprendinys yra tik kai $1 < k \leqslant 2$, tada masės lygios $\frac{p}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right)$ ir $\frac{p}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\right)$ karatų.
*Pastaba.* Pagal nusistovėjusią praktiką mokinys neprivalo atlikti tyrimo — užtenka nurodyti formalų atsakymą.

**141.** a) Sprendinių nėra; b) $-1$; 6; c) $-2$; 1; d) $-6$; $-4$; $-1$; 1; e) 1; $-2$; $-2 \pm \sqrt{6}$; f) $-1$; 2; g) 18; h) 20; i) sprendinių nėra; j) 3; k) 1; $-2$.

*Nurodymas.* e) $y^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{4} - 1 \Rightarrow 2y^2 = \frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2} - 2 \Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ arba $y = \frac{1}{2} \Rightarrow$ arba $x = -2 \pm \sqrt{6}$, arba $x = -2$, arba $x = 7$; f) $x^3 - 4x + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 1) = 0$.

**142.** a) $\{-2\} \cup (0; 1]$; b) $(-5; -1) \cup (1; +\infty)$; c) $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$; d) $(-2; +\infty)$; e) $(-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; f) $(-\infty; 0) \cup (1; 6)$.

**143.** Kai $x = 2$, tai $\frac{4}{4a^2+4} \leqslant \frac{1}{2a^2+a-1} \Leftrightarrow \frac{(a+2)(a-1)}{(a+1)\left(a-\frac{1}{2}\right)} \leqslant 0 \Rightarrow a = -2$ arba $a = 1$.

**144.** $-4$; $-3$.

**145.** $\geqslant 50$.

**146.** a) $(9; 5)$, $(-9; -5)$; b) $(1; 3)$, $(3; 1)$; c) $(2; 3)$, $(3; 2)$.

# 15. TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

Jau nagrinėjome tris dideles funkcijų, apibrėžtų realiųjų skaičių aibėje, šeimas: laipsnines, rodiklines ir logaritmines funkcijas. Šis skyrius praturtins turimų funkcijų arsenalą dar viena didele ir įdomių savybių turinčia funkcijų aibe — trigonometrinėmis funkcijomis. Viena vertus, šios funkcijos nėra naujos. Juk jau seniai žinome, kas yra sinusas, kosinusas, tangentas, kotangentas, ir mokame juos taikyti sprendžiant geometrijos uždavinius. Tačiau kol kas jos yra „ne to paties lizdo paukščiai“ kaip, pavyzdžiui, laipsninės funkcijos. Juk skaičiuojame geometrinių kampų trigonometrines funkcijas, o ne skaičių trigonometrines funkcijas. Svarbiausias mūsų tikslas — išplėtoti šią iš pirmo žvilgsnio keistą idėją: nuo trigonometrinių funkcijų, kurių reikšmes skaičiuojame duotiesiems geometriniams kampams, pereiti prie trigonometrinių funkcijų, apibrėžtų skaičių aibėje.

## 15.1. Kampų matavimas laipsniais ir radianais

Galima pradžioje trumpai aptarti pačią dydžių matavimo sąvoką, itin svarbią ir teorijai, ir praktikai. Juk dydžių būna labai įvairių: ilgis, plotas, masė, elektros srovės stiprumas ar įtampa ir pan.

Norint išmatuoti kokį nors dydį, pasirenkamas matavimo vienetas (tos pačios prigimties dydis) ir tiriama, kiek kartų matavimo vienetas „telpa“ tame matuojamame dydyje. Jeigu matuojamo dydžio negalima „išsemti“ matavimo vienetą pakartojus sveiką skaičių kartų, t. y. lieka mažiau nei vienas matavimo vienetas, pastarasis dalijamas į dalis ir šios dalys talpinamos į likutį. Galų gale, kad ir kokios prigimties būtų matuojamas dydis, jis reiškiamas realiuoju skaičiumi.

Kampai yra geometrinės figūros. Matavimo vienetas (pavyzdžiui, laipsnis) irgi yra kampas. Kampo matavimas — bandymas sudėti jį iš mažesnių dalių (laipsnių). Su ilgio matavimo įrankiu, pavyzdžiui, rulete, kampo neišmatuosi.

Ir vis dėlto! Pasirinkus kitą kampų matavimo vienetą — radianą ir kampų didumus galima rasti matuojant kreivių (apskritimo lankų) ilgius! Kai matematikoje (ir ne tik matematikoje) nustatomas ryšys tarp iš pažiūros skirtingos prigimties objektų, galima tikėtis įdomių dalykų. Šitaip galima paaiškinti ir radiano — naujo kampų matavimo vieneto — reikšmę. Žinoma, laipsnių visiškai pakanka praktiniams tikslams. Tačiau radianas susieja kampų didumus su geometriniais ilgiais, taigi tarsi „suvienija“ skirtingos prigimties dydžius. Tiesa, už tai atsisakoma kai kurių patogumų. Pavyzdžiui, stačiųjų kampų, kurie regimi visur aplinkui, didumas reiškiamas nebe laipsnių skaičiumi 90, o radianų skaičiumi $\frac{\pi}{2}$, kurio tiksli reikšmė nežinoma!

Gerai aptarkime ryšį tarp laipsnio ir radiano. Teisinga rašyti

$$180^\circ = \pi \text{ rad}.$$

Ką reiškia ši lygybė? Pabrėžkime, kad tai ne skaičių lygybė. Žiūrint į ją ir kairėje, ir dešinėje pusėje, reikia „matyti“ ištiestinius kampus. Tačiau šią lygybę galima dalyti tiek iš skaičiaus 180, tiek iš skaičiaus $\pi$. Gausime:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{ rad},\quad \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 1\text{ rad}.$$

Tai taip pat nėra skaitinės lygybės. Jos rodo, kiek gaunama vieną laipsnį matuojant radianais, ir kiek — vieną radianą matuojant laipsniais.

Supratę šiuos paprastus sąryšius, visada sugebėsime nustatyti kampo didumą radianais, kai žinomas kampo didumas laipsniais, ir atvirkščiai. Vadovėlyje pateiktos ir skaitinės lygybės, siejančios du skaičius: to paties kampo didumą laipsniais ir radianais. Jas įsiminti nebūtina.

Parodydami, kad radianai tikrai šį tą matematikoje supaprastina, išveskime skritulio išpjovos, kai centrinio kampo didumas duotas radianais, ploto formulę.

***Žinome:***

kas yra radianas;

kaip matuoti kampą radianais;

koks yra laipsnio ir radiano ryšys.

***Mokame:***

reikšti kampų didumus radianais, kai duoti jų didumai laipsniais;

reikšti kampų didumus laipsniais, kai duoti jų didumai radianais.

## PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Vienintelis dalykas, kurio reikia išmokti sprendžiant šio skyrelio pratimus — kampo didumą laipsniais išreikšti radianais ir atvirkščiai. Kad tai pavyktų — nebūtina išspręsti daug uždavinių. Geriau mažiau, bet iki galo suprantant visus veiksmus, negu daug — vien įstatinėjant reikšmes į formules.
Galbūt geriausia būtų pasiūlyti išspręsti 1 ir 2 pratimus nesinaudojant formulėmis, bet samprotaujant.

**1.** $36° = \frac{\pi}{5}$, $60° = \frac{\pi}{3}$, $135° = \frac{3\pi}{4}$, $360° = 2\pi$, $240° = \frac{4\pi}{3}$, $3960° = 11\pi$.

**2.** $\frac{1}{5}\pi = 36°$, $\frac{2}{3}\pi = 120°$, $\frac{3}{2}\pi = 270°$, $1 = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$, $2 = \left(\frac{360}{\pi}\right)°$, $7\pi = 1260°$.

**3.**

| $r$ | 6 dm | 6 dm | 10 cm | 10 cm | 0,2 m | 0,2 m |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 30° | $\frac{\pi}{6}$ | 120° | $\frac{2}{3}\pi$ | 270° | $\frac{3}{2}\pi$ |
| $l$ | $\pi$ dm | $\pi$ dm | $\frac{20}{3}\pi$ cm | $\frac{20}{3}\pi$ cm | $0{,}3\pi$ m | $0{,}3\pi$ m |
| $S$ | $3\pi$ dm$^2$ | $3\pi$ dm$^2$ | $\frac{100}{3}\pi$ cm$^2$ | $\frac{100}{3}\pi$ cm$^2$ | $0{,}03\pi$ m$^2$ | $0{,}03\pi$ m$^2$ |

**4.** a) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$; b) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

**5.** a) 50°, 70°, 90°, 150°; $\frac{5}{18}\pi$, $\frac{7}{18}\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{6}\pi$;
b) 60°, 80°, 90°, 130°; $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{9}\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{13}{18}\pi$.

**6.** $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{3}$, $0{,}2\pi$, $0{,}55\pi$, $1{,}6\pi$.

## 15.2. Posūkių kampai

Šiame skyrelyje žengiame nedidelį, tačiau labai svarbų žingsnelį skaitinio argumento trigonometrinių funkcijų link.

Pasiūlykime įsivaizduoti, kad spindulys $Ox$ sukamas prieš laikrodžio rodyklę tol, kol jis atsiduria tiesėje $y = x$. Judėdamas jis „užpildė“ 45° kampą. Sakoma, kad spindulio posūkio kampas lygus 45°, arba $\frac{\pi}{4}$ radianų. Tačiau tą patį spindulį galima sukti ir pagal laikrodžio rodyklę, tarkime, kol jis atsidurs tiesėje $y = -x$. Jis vėl „užpildys“ 45° kampą, tačiau judesys juk bus kitoks! Todėl sakoma, kad šiuo atveju spindulio posūkio kampas lygus −45°, arba $-\frac{\pi}{4}$ radianų.

Dabar jau nesunku suvokti, kad spindulį galima sukti įvairiai. Galima jį apsukti aplinkui centrą $O$ vieną kartą (ar kelis kartus) ir dar šiek tiek. Sukti galima tiek pagal laikrodžio rodyklę, tiek prieš ją. Į tą pačią padėtį spindulį galima pervesti labai įvairiais būdais, t. y. įvairiais posūkio kampais. Kaip juos matuoti?

Paprasčiausia nuspręsti, kaip atskirti kryptį prieš laikrodžio rodyklę ir pagal ją. Posūkio prieš laikrodžio rodyklę kampus susitarta reikšti teigiamais skaičiais, pagal laikrodžio rodyklę — neigiamais. Kampo didumui nustatyti galima remtis ankstesniame skyrelyje aptarta kampų matavimo radianais procedūra: suradus, kokio ilgio vienetinio apskritimo lanką prabėga sukant spindulį taškas $A(1; 0)$, galima nustatyti posūkio kampo didumą radianais!

Svarbu pabrėžti, kad kiekvieno posūkio kampo didumas reiškiamas vieninteliu skaičiumi (teigiamu ar neigiamu) ir kiekvienam skaičiui galima nurodyti posūkio kampą, kurio didumą jis išreiškia.

Kai posūkio kampai yra teigiami ir ne didesni už $2\pi$, tai jų didumai sutampa su didumais geometrinių kampų, kuriuos „užpildo“ sukdamasis spindulys.

Žinoma, posūkio kampų didumus galima reikšti ir laipsniais, tačiau turint tikslą įvesti skaitinio argumento trigonometrines funkcijas, radianai yra geriau.

***Suvokiame ir žinome:***

kas yra posūkio kampas;

kaip posūkio kampo didumą reikšti laipsniais ir radianais;

kiekvieną skaičių atitinka posūkio kampas ir atvirkščiai — kiekvieną posūkio kampą atitinka skaičius.

***Mokame:***

pavaizduoti nurodyto didumo posūkių kampus;

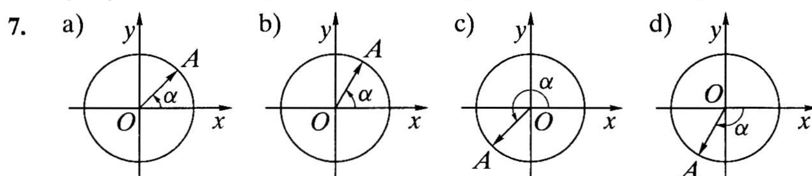
išreikšti posūkio kampų didumą radianais, kai duoti didumai laipsniais;

išreikšti posūkio kampų didumą laipsniais, kai duoti didumai radianais.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šio skyrelio naujovė — posūkių kampai, arba tiesiog — posūkiai. Tai ne abstrakcija — juk posūkius galima stebėti (pavyzdžiui, kai sukasi dviračio ratas). Veiksmai, kurių reikia išmokti — pavaizduoti posūkį, kai duotas jo didumas bei nustatyti žodžiais nusakyto posūkio didumą. Tad svarbiausi skyrelio uždaviniai yra 7, 9–13.

**7.** a) b) c) d)




**8.** a) 139°36′; b) 237°55′.

**9.** Per valandą valandinė rodyklė pasisuka 360° : 12 = 30° kampu, tai per 3 valandas ji pasisuks 30° · 3 = 90° kampu. Panašiai samprotaudami gautume, kad per $4\frac{1}{2}$ val. valandinė rodyklė pasisuks 135° kampu, per $2\frac{3}{4}$ val. — 82,5°, t. y. 82°30′, per $19\frac{1}{3}$ val. — 580°, per $\frac{2}{5}$ val. — 12°, per $\frac{1}{12}$ val. — 2,5°, t. y. 2°30′.

**10.** Kampinis greitis radianais per minutę:
valandinės rodyklės $\frac{2\pi}{12} \cdot \frac{1}{60} = \frac{\pi}{360}$ (rad/min);
minutinės rodyklės $\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ (rad/min);
sekundinės rodyklės $2\pi$ (rad/min).

**11.** Minutinė rodyklė per nurodytą laiką pasisuks kampu:
a) 360°; b) 900°; c) 4320°; d) 450°; e) 2220°.
Valandinė rodyklė per nurodytą laiką pasisuks kampu:
a) 30°; b) 75°; c) 360°; d) 37,5° = 37°30′; e) 185°.

**12.** a) 185° — III, 400° — I, −290° — I, 500° — II, −700° — I, 2000° — III;
b) $\frac{\pi}{7}$ — I, $\frac{2\pi}{7}$ — I, $-\frac{3\pi}{5}$ — III, $1{,}8\pi$ — IV, $-1{,}8\pi$ — I, $2{,}1\pi$ — I, $100{,}2\pi$ — I.

13. **B** $-750°$.

14. $P = 2 \cdot 27 + 27 \cdot \frac{4}{9} = 66\,(\text{mm})$.

15. Jeigu skritulio, kurio spindulys lygus $R$, išpjovą atitinka $t$ radianų centrinis kampas, tai skritulio išpjovos plotas $S = \frac{R^2}{2} \cdot t$. Taigi $288 = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{4}{9}$, $R = 36\,\text{dm}$.

16. $\alpha = 3\,\text{rad}$.

17. a) $129{,}6° = 129°36'$; b) $1{,}6° = 1°36'$.

18. $11{,}25° = 11°15'$; $\frac{\pi}{16}\,\text{rad}$.

19. a) $5\pi$ rad, $10\pi$ rad, $600\pi$ rad; b) $40\pi$ rad, $320\pi$ rad, $920\pi$ rad, $28\,800\pi$ rad.

20. Išreikškime taško judėjimo greitį metrais per sekundę: $720\,\text{m/min} = 12\,\text{m/s}$. 1 radiano centrinį kampą atitinka $\frac{2\pi r}{2\pi} = r = 0{,}5\,(\text{m})$ ilgio lankas. Tada 12 m atitiks $\frac{12}{0{,}5} = 24\,(\text{rad})$ posūkio kampas. Taško kampinis greitis yra 24 rad/s.

21. $-400°$, $-720°$, $-1200°$, $-1800°$, $-7200°$.

## 15.3. Trigonometrinių funkcijų apibrėžimai

Sprendžiant geometrijos uždavinius dažniausiai prisireikia smailiųjų, o kartais ir bukųjų kampų trigonometrinių funkcijų. Jos surandamos iš stačiųjų trikampių kraštinių santykių. Tiesa, smailiųjų ir bukųjų kampų trigonometrinės funkcijos apibrėžiamos skirtingai. Galima priminti tuos apibrėžimus. Tačiau įvedus plokštumoje koordinačių sistemą, tiek smailiųjų, tiek ir bukųjų kampų trigonometrines funkcijas galima apibrėžti visiškai vienodai. Atkreipus į tai dėmesį, galima pastebėti, kad tas apibrėžimas remiantis koordinatėmis tinka ir posūkio kampams! Taigi ne tik apibrėžiama bet kokių posūkio kampų trigonometrinės funkcijos, bet ir lengvai nustatomi pagrindiniai jų sąryšiai:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Belieka padėti paskutinį tašką apibrėžiant naujas funkcijas: kadangi kiekvieną posūkio kampą atitinka skaičius, reiškiantis jo didumą radianais, tai posūkio kampo trigonometrines funkcijas galima tiesiog vadinti atitinkamų skaičių trigonometrinėmis funkcijomis.

Vadovėlyje pateiktos pagrindinės trigonometrinių funkcijų reikšmės. Galima pasiūlyti surasti daugiau kintamojo $x$ reikšmių, kurių sinusas (kosinusas ir t. t.) yra toks, kaip lentelėje. Arba paprašyti nurodyti keletą $x$ reikšmių, su kuriomis, pavyzdžiui, $\cos x = -\frac{1}{2}$ ir pan.

***Suvokiame ir žinome:***

kaip apibrėžiamos skaitinio argumento trigonometrinės funkcijos;

pagrindinius trigonometrinių funkcijų sąryšius;

pagrindines trigonometrinių funkcijų reikšmes.

***Mokame:***

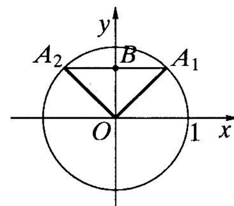
pavaizduoti posūkio kampus, kuriuos atitinka nurodytos trigonometrinių funkcijų reikšmės;

apskaičiuoti ar prastinti trigonometrinius reiškinius, į kuriuos įeina pagrindinės trigonometrinių funkcijų reikšmės.

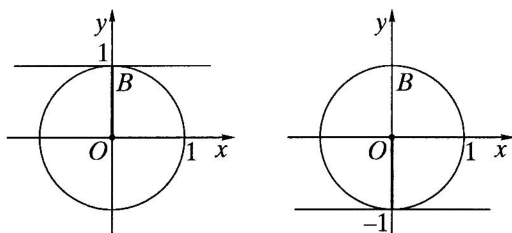
### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Ko gero nei vieno šio skyrelio pratimo nederėtų praleisti. Vertėtų išspręsti nors po vieną dalį. Juk reikia prisiminti pagrindinių kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes bei remiantis jomis išmokti skaičiuoti posūkio kampų trigonometrines funkcijas.

**22.** a) Nubraižykime kampą $\alpha$, kurio sinusas lygus $a$. Nubrėžiame vienetinį apskritimą, kurio centras yra koordinačių pradžioje. $Oy$ ašyje pažymime tašką $B$, kurio ordinatė yra $a$. Per tašką $B$ brėžiame tiesę, lygiagrečią abscisių ašiai. Šios tiesės susikirtimo su apskritimu taškus pažymėkime $A_1$ ir $A_2$ ir nubrėžkime spindulius $OA_1$ ir $OA_2$. Ieškomieji kampai bus tie, kurių galinės kraštinės yra $OA_1$ ir $OA_2$.

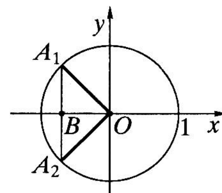



*Pastaba.* Jei $a = 1$, tai aprašytu būdu gauname ne du, o vieną spindulį $OB$, kuris sudaro su teigiama abscisių ašies kryptimi ieškomuosius kampus. Šiuo atveju $\alpha = 90° + 360°n$. Analogiškai esti ir tada, kai $a = -1$. Šiuo atveju $\alpha = -90° + 360°n$.

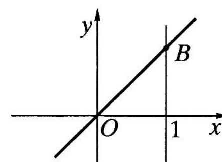



Jei $|a| > 1$, tai nubraižyti tokio kampo negalima.

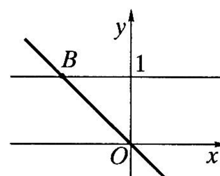
b) Nubraižykime kampą $\alpha$, kurio kosinusas lygus $a$. Kaip ir a) punkte, nubraižyti kampą galima tik tada, kai $|a| \leqslant 1$.
$Ox$ ašyje pažymime tašką $B$, kurio abscisė yra $a$ ir per jį brėžiame tiesę, lygiagrečią ordinačių ašiai. Šios tiesės ir vienetinio apskritimo susikirtimo taškus pažymėkime $A_1$ ir $A_2$ ir nubrėžkime spindulius $OA_1$ ir $OA_2$. Ieškomieji kampai bus tie, kurių galinės kraštinės yra $OA_1$ ir $OA_2$.
*Pastaba.* Šiame brėžinyje skaičius $a < 0$.




c) Nubraižykime kampą $\alpha$, kurio tangentas lygus $a$. Koordinačių plokštumoje brėžiame tiesę $x = 1$ ir joje pažymime tašką $B$, kurio ordinatė yra $a$. Nubrėžiame tiesę $OB$. Visų kampų, kurių galinės kraštinės yra tiesėje $OB$, tangentas lygus $a$.



d) Nubraižykime kampą $\alpha$, kurio kotangentas lygus $a$. Koordinačių plokštumoje brėžiame tiesę $y = 1$ ir joje pažymime tašką $B$, kurio abscisė lygi $a$. Nubrėžiame tiesę $OB$. Visų kampų, kurių galinės kraštinės yra tiesėje $OB$, kotangentas lygus $a$.




**23.** a) $\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$; b) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 6.

**24.** Pavyzdžiui:

a) $\sin\alpha = 0$, kai $\alpha = 0°, 180°$; $\cos\alpha = 1$, kai $\alpha = 360°, 720°$; $\operatorname{tg}\alpha = 0$, kai $\alpha = 0°, 180°$;

b) $\sin\alpha = -1$, kai $\alpha = -90°, 270°$; $\cos\alpha = -1$, kai $\alpha = -180°, 180°$; $\operatorname{ctg}\alpha = 0$, kai $\alpha = 90°, 270°$.

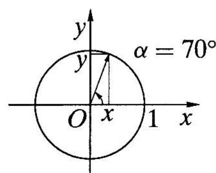
*Pastaba.* Visos $\alpha$ reikšmės:

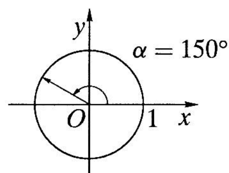
a) $\sin\alpha = 0$, kai $\alpha = \pi k$; $\cos\alpha = 1$, kai $\alpha = 2\pi k$; $\operatorname{tg}\alpha = 0$, kai $\alpha = \pi k$; čia $k \in Z$;

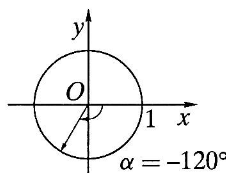
b) $\sin\alpha = -1$, kai $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\cos\alpha = -1$, kai $\alpha = \pi + 2\pi k$; $\operatorname{ctg}\alpha = 0$, kai $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$; čia $k \in Z$.

**25.** a) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0; b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $-1$; c) $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$, $\sqrt{3}$; d) $\frac{1}{2}+\cos 20°$, $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$, $1\frac{1}{2}$.

**26.**



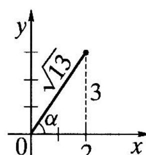

$\sin 70° = y \approx 0{,}9$, $\cos 70° = x \approx 0{,}3$, $\operatorname{tg} 70° = \frac{y}{x} \approx 3$, $\operatorname{ctg} 70° = \frac{x}{y} \approx 0{,}3$;
$\sin 150° \approx 0{,}5$, $\cos 150° \approx -0{,}9$, $\operatorname{tg} 150° \approx -0{,}6$, $\operatorname{ctg} 150° \approx -1{,}8$;
$\sin(-120°) \approx -0{,}9$, $\cos(-120°) \approx -0{,}5$, $\operatorname{tg}(-120°) \approx 1{,}8$, $\operatorname{ctg}(-120°) \approx 0{,}6$.

**27.** a) Kai $A(1; 1)$, tai $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1$;
kai $A(-1; 1)$, tai $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1$;
kai $A(1; -1)$, tai $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1$;
kai $A(-1; -1)$, tai $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1$;

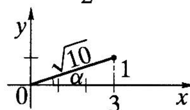
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
$\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$;
$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$;
$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — neegzistuoja;
$\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\alpha$ — neegzistuoja, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$;
$\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\operatorname{ctg}\alpha$ — neegzistuoja;
$\sin\alpha = -1$, $\cos\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\alpha$ — neegzistuoja, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$;

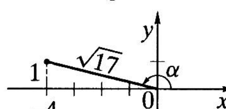
d) $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$;



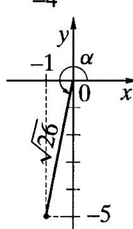

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 3$;




$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -4$;




$\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{tg}\alpha = 5$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{5}$.



## 15.4. Trigonometrinių funkcijų savybės

Šiame skyrelyje tiriamos dvi svarbios trigonometrinių funkcijų savybės: periodiškumas ir lyginumas bei nelyginumas.

Galima pradėti nuo pasiūlymo pavaizduoti, pavyzdžiui, posūkio kampus $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}\pm 2\pi$, $\frac{\pi}{4}\pm 4\pi, \ldots$ ir pasakyti, kam lygūs šių posūkio kampų (arba tiesiog skaičių) sinusai, kosinusai, ... O jeigu vietoj $\frac{\pi}{4}$ imtume kitą skaičių? Šitaip prieinama prie periodinės funkcijos sąvokos. Pateikime ir aptarkime apibrėžimą. Atkreipkime dėmesį, kad žinant periodinės funkcijos reikšmę su viena nepriklausomojo kintamojo reikšme $x = x_0$, galima atidėti be galo daug tokios funkcijos grafiko taškų.

Taigi trigonometrinės funkcijos yra periodinės, mažiausias teigiamas sinuso ir kosinuso periodas yra $2\pi$, o tangento ir kotangento — $\pi$.

Yra ir daugiau periodinių funkcijų. Su viena jau anksčiau esame susidūrę, tik neatkreipėme į periodiškumą dėmesio. Funkcija $y = \{x\}$ yra periodinė. Pasiūlykite prisiminti, kaip atrodo šios funkcijos grafikas, bei nustatyti, koks yra mažiausias teigiamas šios funkcijos periodas.

Galima skirti funkcijų periodiškumui tyrinėti daugiau dėmesio. Pavyzdžiui, patyrinėkime funkciją

$$f(x) = \sin(3x + 5).$$

Nustatykime, ar ši funkcija yra periodinė. Jeigu taip — raskime jos mažiausią teigiamą periodą.

Jeigu ši funkcija periodinė ir $T$ yra jos periodas, tai $f(x) = f(x + T)$, arba

$$\sin(3x+5) = \sin\big(3(x+T)+5\big) = \sin(3x+5+3T).$$

Pažymėję $3x + 5 = v$, perrašome lygybę taip:

$$\sin v = \sin(v + 3T).$$

Ieškome mažiausio teigiamo $T$, su kuriuo ši lygybė teisinga visiems $v$. Remdamiesi tuo, kad mažiausias teigiamas sinuso funkcijos periodas yra $2\pi$, mažiausią funkcijos $f(x)$ periodą gauname iš lygybės $2\pi = 3T$, $T = \frac{2\pi}{3}$.

Trigonometrinių funkcijų lyginumo savybes nesunku nustatyti iš brėžinio.

***Suvokiame ir žinome:***

periodinės funkcijos apibrėžimą;

trigonometrinių funkcijų periodiškumo savybes;

trigonometrinių funkcijų lyginumo savybes.

***Mokame:***

patikrinti, ar funkcija yra periodinė;

nustatyti paprastų funkcijų mažiausius teigiamus periodus.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Kadangi svarbiausia skyrelio tema — pagrindinių trigonometrinių funkcijų periodiškumas, tai ir spręsti pratimus geriausia pradėti nuo tų, kuriuos sprendžiant šią savybę tenka naudoti (30). Po to galima panagrinėti kelias 29 pratimo dalis, ir, galbūt, aptarti 28 uždavinį. Lyginės ir nelyginės funkcijos sąvokos nėra naujos. Pakanka panagrinėti kelis pavyzdžius (iš 31 ir 32 pratimų), kad prisimintume, kaip tikrinama, ar funkcija turi lyginumo (nelyginumo) sąvybę, ar ne. Gali pasirodyti, kad 33 uždavinys yra ne savo vietoje — juk redukcijos formulių dar neturime. Tačiau kai kuriems moksleiviams galima pasiūlyti išspręsti uždavinį atidedant reikalingus posūkio kampus (laikant, kad $\alpha$ yra smailusis). Tai būtų geras įvadas į kitą skyrių.

**28.** Periodinės funkcijos: e), f), g), h), i).

**29.** a) Ieškome mažiausio teigiamo $T$, kad $\sin(2(x + T)) = \sin(2x)$ būtų teisinga su visais $x$: $\sin(2x+2T) = \sin(2x)$; $v = 2x$, $\sin(v+2T) = \sin v$, $2T = 2\pi$, $T = \pi$. Taigi $\pi$ — mažiausias teigiamas periodas.
b) $4\pi$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $5\pi$; e) $3\pi$; f) $\frac{\pi}{10}$.

**30.** a) $\sin 415^\circ = \sin(360^\circ + 55^\circ) = \sin 55^\circ$; b) $\cos 24^\circ$; c) $\operatorname{tg} 160^\circ$;
d) $\operatorname{ctg} 125^\circ$; e) $\sin\frac{\pi}{2}$; f) $\cos\frac{7}{9}\pi$; g) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; h) $\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi$; i) $\sin 0{,}2\pi$.

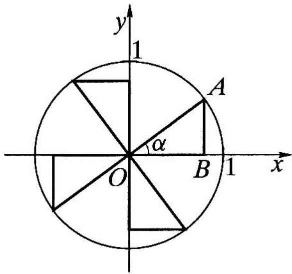
**31.** *Nurodymas.* Funkcija $y = f(x)$ vadinama lygine, kai su kiekvienu $x$ iš funkcijos apibrėžimo srities yra teisinga lygybė $f(-x) = f(x)$. Funkcija $y = f(x)$ vadinama nelygine, kai su kiekvienu $x$ iš funkcijos apibrėžimo srities teisinga lygybė $f(-x) = -f(x)$.
d) $f(-x) = \frac{\sin^2(-x)\cdot\cos(-x)}{(-x)^2} - \operatorname{tg}^2(-x) = \frac{\sin^2 x\cos x}{x^2} - \operatorname{tg}^2 x = f(x)$;
$f(-x) = f(x)$, $f(x)$ — lyginė funkcija.
$g(-x) = -x + \frac{\sin(-x)}{\cos^2(-x)} = -x - \frac{\sin x}{\cos^2 x} = -\big(x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\big) = -g(x)$;
$g(-x) = -g(x)$, $g(x)$ — nelyginė funkcija.

**32.** d) $f(x) = 2x - \cos x$, $f(-x) = 2\cdot(-x) - \cos(-x) = -2x - \cos x = -(2x + \cos x)$. Nesunku parinkti tokią $x$ reikšmę, kad $f(-x) \neq f(x)$ ir $f(-x) \neq -f(x)$, pavyzdžiui, $x = \frac{\pi}{3}$. Taigi funkcija $f(x)$ nėra nei lyginė, nei nelyginė.

**33.** *Nurodymas.* Šį pratimą spręskite išnagrinėję skyrelį „Redukcijos formulės“.
a) $-2\sin\alpha + 2\operatorname{ctg}\alpha$; b) 0; c) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; d) $1 + 2\sin\alpha$.

## 15.5. Redukcijos formulės

Priminkime, kad trigonometrinės funkcijos yra periodinės. Tai reiškia, kad kiekvieno skaičiaus sinusas (kosinusas) lygus atitinkamo skaičiaus iš intervalo $[0; 2\pi]$ sinusui (kosinusui); analogiškai kiekvieno skaičiaus tangentas (kotangentas) lygus skaičiaus iš intervalo $[0; \pi]$ tangentui (kotangentui). Prieš pradedant nagrinėti redukcijos formules galima išspręsti keletą pavyzdžių, kuriuose trigonometrinės funkcijos išreiškiamos argumentų iš minėtų intervalų trigonometrinėmis funkcijomis, t. y. kuriuose reikia išskirti trigonometrinės funkcijos periodą. Skyriaus teksto pavyzdžiuose periodų išskyrimas nagrinėjamas kartu su redukcijos formulių taikymu. Tačiau galima tokią užduotį spręsti ir atskirai, pavyzdžiui, formuluojant taip:
išreikškite $\sin 567°$, $\cos\frac{235\pi}{7}$, $\sin 215°$ argumento iš $[0°; 360°]$, $[0; 2\pi]$ trigonometrinėmis funkcijomis.
Pereikime prie redukcijos formulių. Jų esmę galima paaiškinti gana paprastai. Koordinačių plokštumos pirmajame ketvirtyje ant vienetinio apskritimo pasižymėkime tašką $A$. Statmens iš taško $A$ į $Ox$ ašį pagrindą pažymėkime $B$. Tegu $\angle AOB = \alpha$. Tada $\sin\alpha = AB$, $\cos\alpha = OB$. Pasukime šį trikampį stačiu kampu (tada statinis $OB$ atsidurs ašyje $Oy$), dar kartą tuo pačiu kampu (statinis $OB$ atsidurs $Ox$ ašyje) ir dar kartą.




Gausime keturis trikampius, kurie išdėstyti tarsi malūno sparnai. Stačiųjų trikampių įžambinės atitinka kampus $\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$. Pasiūlykime išreikšti trigonometrines kampų $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ funkcijas kraštinių $AB$ ir $OB$ ilgiais, atsimenant, kad $\sin\alpha = AB$, $\cos\alpha = OB$.

„Malūnas“ gerai iliustruoja redukcijos taisyklę: kodėl funkcija keičiama (į panašią) tada, kai pridedamas nelyginis skaičiaus $\frac{\pi}{2}$ kartotinis ir kodėl nekeičiama — kai lyginis. Šis brėžinys netgi gali būti naudojamas vietoj žodžiais formuluojamos taisyklės.

Galima pasiūlyti nusibraižyti panašius „malūno sparnus“ iliustruojančius skaičių $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\pi-\alpha$, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ trigonometrinių funkcijų redukavimą.

Išmokus redukuoti skaitinio argumento trigonometrines funkcijas, galima panagrinėti 4 pavyzdį, kuris rodo, kaip taikyti redukcijos formules pertvarkant trigonometrinius reiškinius.

***Suvokiame ir žinome:***

redukcijos taisyklę;

redukcijos taisyklę vaizduojantį brėžinį.

***Mokame*** taikyti redukcijos taisyklę redukuojant skaitinio argumento trigonometrines funkcijas ir pertvarkant trigonometrinius reiškinius.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Svarbiausia — išmokti redukuoti trigonometrines funkcijas. Tam skirti 34, 35 pratimai. Išmokus galima pasitreniruoti jas taikant reiškinių pertvarkymams (37–38).

**34.** a) $-\sin 40°$, $-\sin 10°$, $\operatorname{tg} 30°$, $-\operatorname{tg} 10°$;
b) $\cos(0{,}1\pi)$, $-\cos(0{,}2\pi)$, $\operatorname{ctg}(0{,}1\pi)$, $-\operatorname{ctg}(0{,}1\pi)$.

**35.**

| $\alpha =$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $-\frac{2}{3}\pi$ | $210°$ | $315°$ | $-225°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha =$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\cos\alpha =$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha =$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-1$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha =$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $-1$ | $-1$ |

**36.** a) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha} = 1$;
b) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha} =$
$\sin\alpha - \cos\alpha$;
c) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1 = \sin^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) - \sin^2\alpha + 1 =$
$\sin^2\alpha - \sin^2\alpha + 1 = 1$;
d) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 =$
$\cos^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) - (1-\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha - 1$;

e) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

f) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

**37.** a) $\mathrm{tg}\,49^\circ = \mathrm{ctg}\,41^\circ$, todėl $\mathrm{tg}\,41^\circ \cdot \mathrm{tg}\,49^\circ = \mathrm{tg}\,41^\circ \cdot \mathrm{ctg}\,41^\circ = 1$; $\mathrm{tg}\,48^\circ = \mathrm{ctg}\,42^\circ$, todėl $\mathrm{tg}\,42^\circ \cdot \mathrm{tg}\,48^\circ = 1$.
Skirstant sandaugą į daugiklių poras, be poros liks tik $\mathrm{tg}\,45^\circ = 1$. Taigi sandauga lygi 1.

b) 1.

**38.** a) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos(\frac{3}{2}\pi-\alpha)\,\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)\cdot\sin(\frac{3}{2}\pi+\alpha)} = \frac{\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{(-\cos\alpha)} = \sin\alpha$;

b) $\frac{\sin(180^\circ+\alpha)}{\sin(270^\circ+\alpha)} + \frac{\cos(540^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ+\alpha)-1} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} + \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha-1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+1} =$
$\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+1)} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha}$;

c) $\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin^2(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$;
$-\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \cos\alpha$;

d) $\sin(90^\circ + \alpha) - \frac{1}{\cos\alpha} = \cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha} = -\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$;
$\frac{\cos^2(270^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)} = -\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$;

e) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

f) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3 =$
$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) =$
$\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$
$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

## 15.6. Funkcija $f(x) = \sin x$

Svarbiausios skyrelio temos — sinuso funkcijos grafiko braižymas ir paprastų lygčių ir nelygybių su sinuso funkcija sprendimas.

Sinuso funkcijos grafiko braižymui naudojamas brėžinys, kuris vaizduoja plokštumą su dviem koordinačių sistemomis. Vienos koordinačių sistemos pradžios taškas yra pagalbinio vienetinio apskritimo centras, kitoje — braižomas grafikas. Apskritimas dalijamas taškais į vienodas dalis. Į vienodas dalis dalijamas ir $Ox$ ašies intervalas $[0; 2\pi]$, atidėtas nuo antrosios koordinačių sistemos pradžios taško. Galima pastebėti, kad nuo antrosios koordinačių sistemos pradžios taško atidedamos viena po kitos atkarpos, kurių ilgiai lygūs ilgiams lankų, į kuriuos padalytas apskritimas. Prieš atidedant grafiko taškus galima aptarti, kaip keistųsi sinuso reikšmė, keičiantis posūkio kampui, pavyzdžiui, vienetinio apskritimo spindulį $OA$ sukant prieš laikrodžio rodyklę. Jeigu taške $A$ „įrengtume" prožektorių, kurio spindulys visada nukreiptas lygiagrečiai $Ox$ ašiai, tai ant $Oy$ ašies gautume „švytuojantį" tašką.

Tikriausiai verta pasiūlyti patiems moksleiviams persibraižyti sinusoidę. Šitaip grafiko konstrukcija bus geriau suvokiama. Galima atkreipti dėmesį, kad kai kintamojo $x$ reikšmės didėja nuo nulio, įgydamos mažas reikšmes, sinusoidė „kyla" beveik taip pat kaip ir tiesė $y = x$.

Nenorint ilginti ir taip jau netrumpo skyrelio, nėra paaiškinta, kaip braižyti funkcijos $y = \sin(2x)$ ir kitų panašių funkcijų grafikus. Ir tokių funkcijų grafikų braižymą galima neformaliai paaiškinti remiantis tuo pačiu vienetiniu apskritimu. Tarkime, reikia nubraižyti funkcijos $y = \sin(2x)$ grafiką. Antroje koordinačių sistemoje atidedamas nuo pradžios taško skaičius $x$, tačiau vienetinio apskritimo spindulys pasukamas dvigubai didesniu kampu, t. y. $2x$. Geriausia funkcijos grafiką braižyti tame pačiame brėžinyje, kur jau nubraižytas funkcijos $y = \sin x$ grafikas. Tada grafiko „suspaudimo" ar „ištempimo" veiksmai bus geriau motyvuoti. Suvokus, kokius veiksmus reikia atlikti su sinusoide, norint gauti funkcijų $y = \sin(ax + b)$ grafikus, galima braižyti grafikus remiantis ir formaliomis taisyklėmis: pastumiame sinusoidę taip, kad jos taškas $(0; 0)$ pereitų į tašką $(x_0; 0)$ $(ax_0+b = 0)$, po to, priklausomai nuo $a$ reikšmės, grafiką ištempiame arba suspaudžiame.

Lygties $\sin x = a$ tyrinėjimas pradedamas nuo reikšmių $a = -1;\ 0;\ 1$. Moksleiviai ir patys gali surasti lygčių su tokiomis $a$ reikšmėmis sprendinius.

Atvejo $0 < a < 1$ tyrinėjimą irgi galima pradėti nuo skaitinio pavyzdžio, tarkime, nuo lygties $\sin x = \frac{1}{2}$. Tada bus geriau suprantama sprendinių aibės struktūra ir bendruoju atveju.

Įsitikinus, kad lygties $\sin x = a$ sprendinius galima užrašyti suradus šios lygties sprendinį, priklausantį intervalui $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, šis svarbusis sprendinys pavadinamas skaičiaus $x$ arksinusu. Kodėl toks pavadinimas? Galima aiškinti kad ir taip. Prisiminkime vienetinį apskritimą, kurį naudojome braižydami sinusoidės grafiką. Ką reiškia rasti teigiamo skaičiaus arksinusą? Žinant vienetinio apskritimo taško atstumą iki $Ox$ ašies (sinusą), reikia rasti apskritimo lanko nuo šio taško iki susikirtimo su $Ox$ ašimi ilgį (kampo didumą). Lankas lotyniškai yra *arc*. Taigi žinodami atkarpos ilgį (sinusą), ieškome lanko ilgio.

Skyrelyje paprastos nelygybės sprendžiamos ir remiantis grafikais, ir geometriniais brėžiniais. Abi interpretacijos yra svarbios, papildo viena kitą. Reikėtų abi jas panagrinėti.

Arksinuso, kaip atvirkštinės sinuso funkcijos, interpretacija pateikta pačioje pabaigoje. Manome, kad ji nėra labai svarbi. Juk arksinusas mokyklinėje matematikoje naudojamas tik lygčių sprendiniams užrašyti, o kaip funkcija — labai retai. Tikriausiai pakaks pasiūlyti šią pusę puslapio pasiskaityti patiems.

***Suvokiame ir žinome:***

sinuso funkcijos grafiko konstravimą;
sinuso funkcijos savybes;
paprastų lygčių ir nelygybių sprendinių aibių struktūrą.

***Mokame:***

braižyti sinuso funkcijos grafiką;
spręsti paprastas lygtis ir nelygybes.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pirmiausia reikia įprasti braižyti sinuso funkcijos grafiką, įsivaizduoti, kaip jis atrodys atlikus paprastas transformacijas. Tam skirti 39–45 pratimai. Lygčių sprendimą galima pradėti nuo 48 ir 49 pratimų nenaudojant nei arksinuso sąvokos, nei sprendinių formulės. Galbūt ir 50 pratimo pirmąsias dalis verta išspręsti be formulės — naudojantis grafiku ar geometriniu brėžiniu. Šitaip bus geriau suvokta lygties sprendinių aibės struktūra, kurią nelengva įžvelgti iš bendros formulės.

**39.** a) $x = \boldsymbol{R}$; b) $x \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; c) $x \neq 0$.

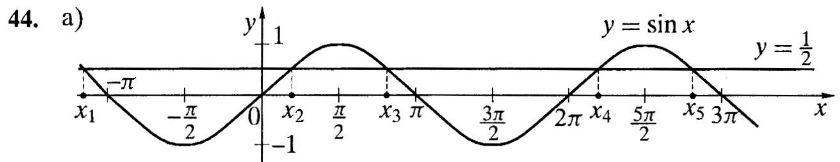
**40.** a) $[-1; 1]$; b) $[-3; 3]$; c) $[0; 1]$; d) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$.

**41.** Kampų, tenkinančių b) ir c) punktų sąlygas nėra. Kitais atvejais — yra.

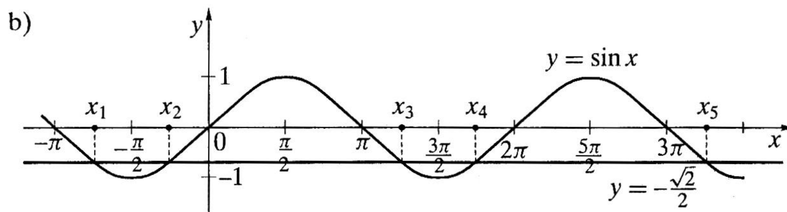
**42.** a) $\sin(-60°) < \sin(-30°) < \sin 60° < \sin 75° < \sin 90°$;
b) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \sin 0 < \sin\frac{\pi}{6} < \sin\frac{\pi}{4} < \sin\frac{3}{10}\pi$.

**43.** a) Funkcija $f(x)$ didėja, kai $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<2x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;
mažėja, kai $\frac{\pi}{2}+2\pi k<2x<\frac{3}{2}\pi+2\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{3}{4}\pi+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;
b) funkcija $f(x)$ didėja, kai $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $-\frac{3}{4}\pi+2\pi k<x<\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;
mažėja, kai $\frac{\pi}{2}+2\pi k<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi+2\pi k$, $\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{5}{4}\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;
c) funkcija $f(x)$ didėja, kai $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<-3x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;
mažėja, kai $\frac{\pi}{2}+2\pi k<-3x<\frac{3}{2}\pi+2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi k<x<-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;
d) funkcija $f(x)$ didėja, kai $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<-x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $-\frac{5}{6}\pi+2\pi k<-x<\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5}{6}\pi+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$;
mažėja, kai $\frac{\pi}{2}+2\pi k<-x+\frac{\pi}{3}<\frac{3}{2}\pi+2\pi k$, $\frac{\pi}{6}+2\pi k<-x<\frac{7}{6}\pi+2\pi k$, $-\frac{7}{6}\pi+2\pi k<x<-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

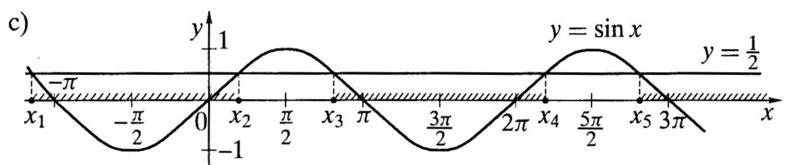
**44.** a)



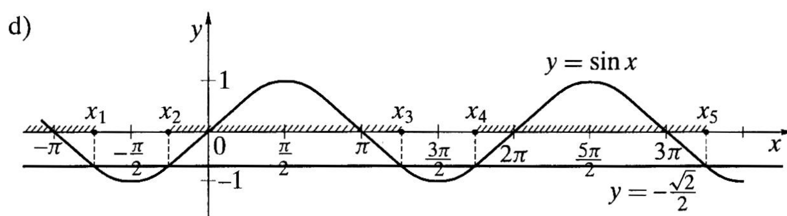

b)



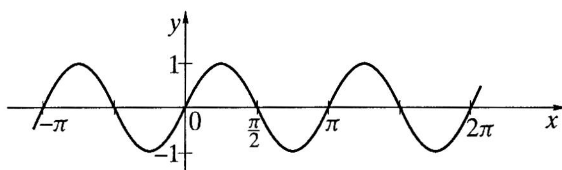

c)



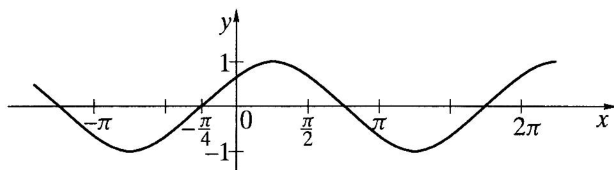

d)



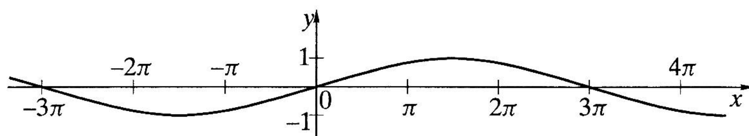

**45.** a) Funkcijos $f(x)=\sin(2x)$ mažiausias teigiamas periodas yra $\pi$. Todėl funkcijos $f(x)=\sin(2x)$ grafiką gausime dvigubai „suspaudę" sinusoidę $y=\sin x$ išilgai $x$ ašies.



b) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ — tai bus grafikas sinusoidės „pastumtos“ abscisių ašimi į kairę pusę atstumu $\frac{\pi}{4}$.




c) Mažiausias teigiamas funkcijos $f(x) = \sin\frac{x}{3}$ periodas yra $6\pi$. Taigi funkcijos $f(x) = \sin\frac{x}{3}$ grafikas bus trigubai „ištempta“ sinusoidė $y = \sin x$ išilgai $x$ ašies.




**46.** a) $\arcsin 0 = 0$, nes $\sin 0 = 0$; b) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, nes $\sin\frac{\pi}{2} = 1$;
c) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, nes $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$; d) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, nes $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;
e) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, nes $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
f) $\arcsin\frac{\pi}{2}$ neegzistuoja, nes $\frac{\pi}{2} > 1$.

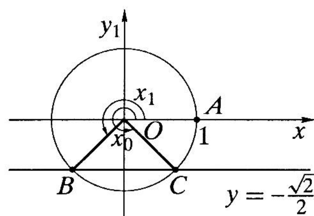
**47.** a) $\frac{5}{12}\pi$; b) 0.

**48.** a) $\sin(2x) = 0$, tai $2x = \pi k$, $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;
b) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; c) $x = -\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; d) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

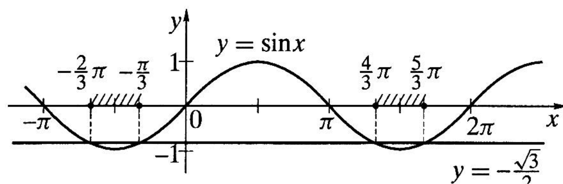
**49.** a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, kai $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;
b) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, kai $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$;
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, lygtis sprendinių neturi, nes $\sqrt{2} > 1$;
d) $\sqrt{2}\sin(-2x) = 1$, kai $\sin(-2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $-2x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $-2x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi k}{2}$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

**50.** a) $(-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; b) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
c) $(-1)^k\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;
d) $\sin(2-3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2-3x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k$, $-3x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} - 2 + \pi k$, $x = (-1)^{k+2}\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
e) $(-1)^k\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; f) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

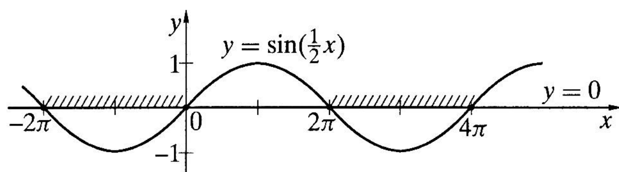
**51.** a) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Iš brėžinio matome, kad $x_0 = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ ir $x_1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Taigi $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5}{4}\pi + 2\pi k$, $k \in Z$;




b) $-2\sin x \geqslant \sqrt{3}$, $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$;

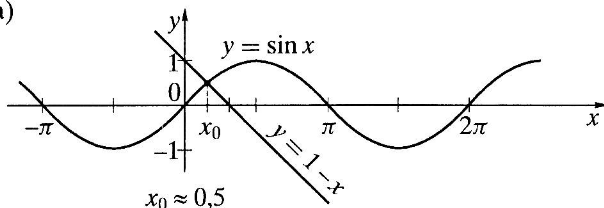


c) $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \leqslant 0$, $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \leqslant 0$,
$-\pi + 2\pi k \leqslant \frac{1}{2}x \leqslant 2\pi k$, $-2\pi + 4\pi k \leqslant x \leqslant 4\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

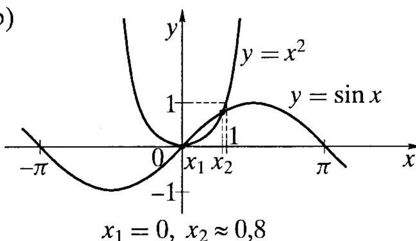



d) $3\sin(3x) > 6$, $\sin(3x) > 2$, sprendinių nėra.

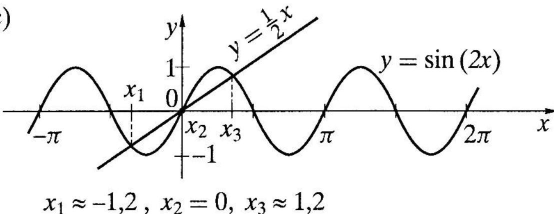
**52.** a)



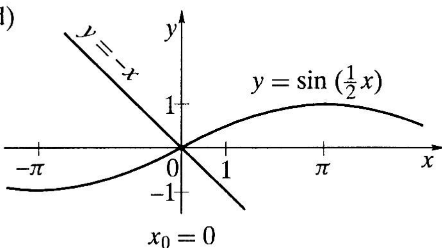

b)




c)




d)




**53.** a) Lygtis $\sin x = 3 + m$ neturės sprendinių, kai $3 + m < -1$ arba $3 + m > 1$, t. y. $m < -4$ arba $m > -2$;
b) $m > 5$ arba $m < 3$;
c) $16 - m^2 < -1$, $m^2 - 17 > 0$, $m < -\sqrt{17}$ ir $m > \sqrt{17}$; arba $16 - m^2 > 1$, $m^2 - 15 < 0$, $-\sqrt{15} < m < \sqrt{15}$;
d) $m \in (-\infty; -\sqrt{7}) \cup (-\sqrt{5}; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$.

**54.** a) $\arcsin(2x - 3) = \frac{\pi}{2}$, tai $2x - 3 = 1$ ir $x = 2$;
b) $\arcsin(x + 1) = \frac{\pi}{6}$, tai $x + 1 = \frac{1}{2}$ ir $x = -\frac{1}{2}$.

# 15.7. Funkcija $f(x) = \cos x$

Skyrelio struktūra ir dėstymo bruožai tokie pat, kaip ir skyrelio apie sinuso funkciją. Tik kosinuso funkcijos grafikas braižomas kitaip — remiantis jau nubraižyta sinusoide.

***Suvokiame ir žinome:***
kaip gauti kosinuso funkcijos grafiką transformuojant sinuso grafiką;
kosinuso funkcijos savybes;
paprastų lygčių ir nelygybių su kosinusu sprendinių aibės struktūrą;

***Mokame:***
braižyti kosinuso funkcijos grafiką;
spręsti paprastas lygtis ir nelygybes.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrus sinuso funkcijos skyrelio pratimams daugiau laiko, nagrinėjant kosinuso funkciją tikriausiai pavyks jo sutaupyti. Sprendžiant pratimus tinka tas pats eiliškumas kaip ankstesniame skyrelyje: funkcijos savybės ir grafikas (55–61), paprastos lygtys (64, 65), bendroji formulė (66), nelygybės (67).

**55.** a) $x = \boldsymbol{R}$; b) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; c) $x \neq 0$.

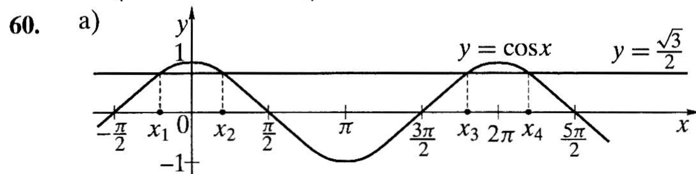
**56.** a) $[-1; 1]$; b) $[-2; 2]$; c) $[0; 1]$; d) $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$.

**57.** Kosinusas negali būti lygus 1,4 ir $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$.

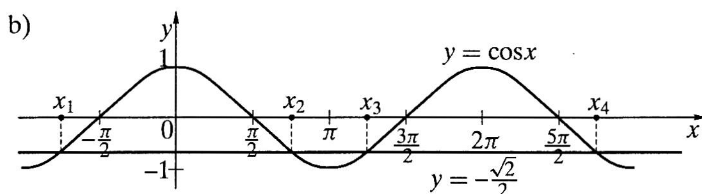
**58.** a) $\cos 90° < \cos(-80°) < \cos 75° < \cos 60° < \cos(-30°)$;
b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \cos\frac{\pi}{4} < \cos\frac{\pi}{6} < \cos 0°$.

**59.** a) Funkcija $f(x)$ didėja, kai $-\pi + 2\pi k < 3x < 2\pi k$, $-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
mažėja, kai $2\pi k < 3x < \pi + 2\pi k$, $\frac{2\pi k}{3} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
b) funkcija $f(x)$ didėja, kai $-\pi + 2\pi k < x + \frac{\pi}{6} < 2\pi k$,
$-\frac{7}{6}\pi + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
mažėja, kai $2\pi k < x + \frac{\pi}{6} < \pi + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
c) funkcija $f(x)$ didėja, kai $-\pi + 2\pi k < -2x < 2\pi k$, $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
mažėja, kai $2\pi k < -2x < \pi + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
d) funkcija $f(x)$ didėja, kai $-\pi + 2\pi k < \frac{\pi}{4} - x < 2\pi k$,
$-\frac{5}{4}\pi + 2\pi k < -x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{5}{4}\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
mažėja, kai $2\pi k < \frac{\pi}{4} - x < \pi + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < -x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$,
$-\frac{3}{4}\pi + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

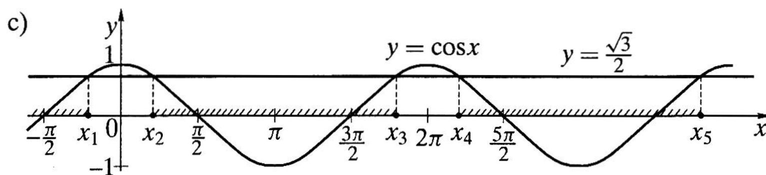
**60.** a)



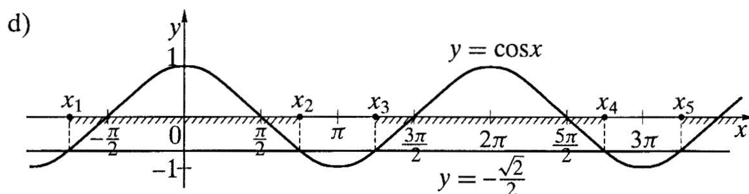

b)



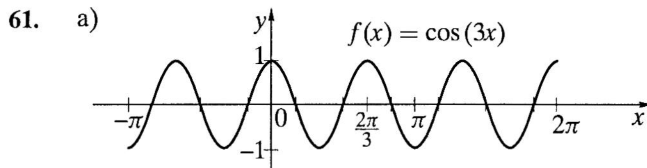

c)



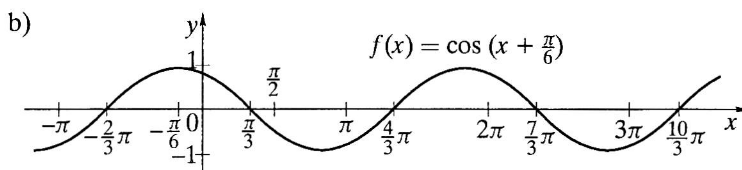
d)



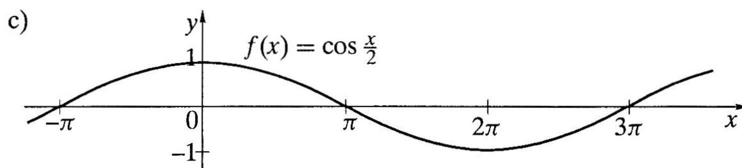

**61.** a)




b)




c)




**62.** a) $\arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$, nes $\cos\frac{\pi}{2} = 0$;
b) $\arccos 1 = 0$, nes $\cos 0 = 1$;
c) $\arccos(-1) = \pi$, nes $\cos\pi = -1$;
d) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, nes $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;
e) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$, nes $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
f) $\arccos\frac{\pi}{2}$ neapibrėžtas, nes $\frac{\pi}{2} > 1$.

**63.** a) $\frac{13}{18}\pi$; b) $\frac{5}{12}\pi$.

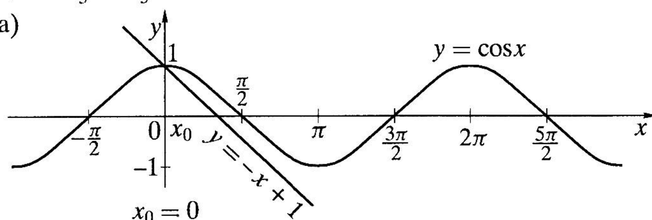
**64.** a) $\cos(3x) = 0$, kai $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, kai $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
c) $\cos(-2x) = 0$, kai $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
d) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$, kai $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

**65.** $|f(x)| = 1$, kai $f(x) = 1$ arba $f(x) = -1$.
a) $f(x) = 1$, kai $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
$f(x) = -1$, kai $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -1$, $x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, lygtis sprendinių neturi. Lygtis $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ sprendinių taip pat neturi;
c) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ir $x = \pm\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
d) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$ ir $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
e) suprastiname reiškinį $\cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$ ir gauname:
$f(x) = -2\cos x$.
$f(x) = 1$, kai $-2\cos x = 1$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
$f(x) = -1$, kai $-2\cos x = -1$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

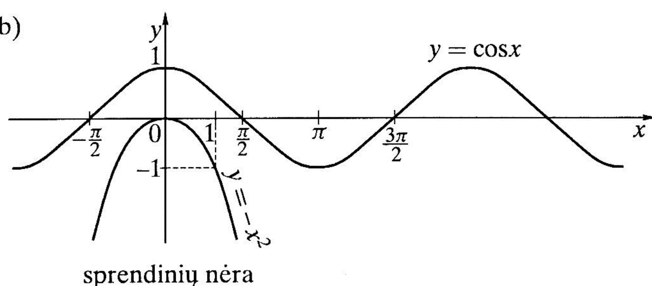
**66.** a) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; b) $\pm\frac{5}{24}\pi + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; c) $\pm\frac{3}{4}\pi + 6\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
d) $\pm\frac{2}{9}\pi + \frac{4}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; e) $\pm\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
f) $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}$, $\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k$,
$x = \pm\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

**67.** a) $\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}\pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;
b) sprendiniai — visi realieji skaičiai;
c) $-\frac{2}{3}\pi + 8\pi k < x < \frac{2}{3}\pi + 8\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;
d) $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

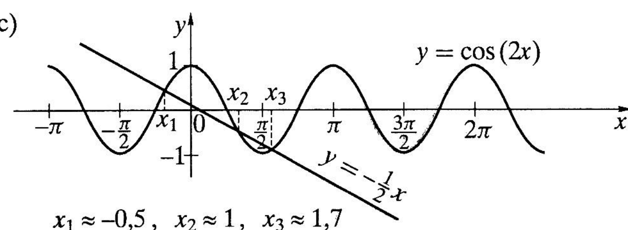
**68.** a)



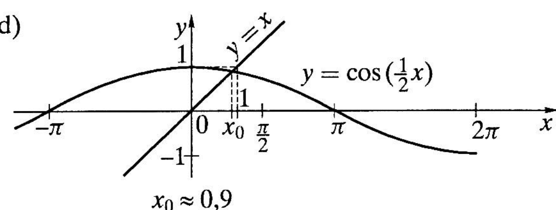

b)




c)




d)




**69.** a) $-1 \leqslant 2 + m \leqslant 1,\ -3 \leqslant m \leqslant -1$;
b) $-1 \leqslant 5 - m \leqslant 1,\ 4 \leqslant m \leqslant 6$;
c) $\begin{cases} m^2 - 25 \leqslant 1, \\ m^2 - 25 \geqslant -1; \end{cases} \begin{cases} m^2 - 26 \leqslant 0, \\ m^2 - 24 \geqslant 0; \end{cases} \begin{cases} (m - \sqrt{26})(m + \sqrt{26}) \leqslant 0, \\ (m - \sqrt{24})(m + \sqrt{24}) \geqslant 0; \end{cases}$
$m \in [-\sqrt{26}; -\sqrt{24}] \cup [\sqrt{24}; \sqrt{26}]$;
d) $\begin{cases} 7 - m^2 \leqslant 1, \\ 7 - m^2 \geqslant -1; \end{cases} \begin{cases} m^2 - 6 \geqslant 0, \\ m^2 - 8 \leqslant 0; \end{cases}$
$m \in [-\sqrt{8}; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; \sqrt{8}]$.

**70.** a) $\arccos(x^2 - 2) = \pi$, tai $x^2 - 2 = -1$, $x_1 = 1$ ir $x_2 = -1$;
b) $\arccos(x^2 - 5x + 7) = 0$, tai $x^2 - 5x + 7 = 1$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

## 15.8. Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$

Tangento funkcijos, kaip ir sinuso funkcijos, grafikui braižyti naudojamas tas pats vienetinis apskritimas ir ta pati plokštumos koordinačių sistema, tačiau — kitaip. Ir šio grafiko braižymą moksleiviams tikriausiai verta pakartoti patiems. Galima atkreipti dėmesį, kad tangentoidė, kaip ir sinusoidė, su mažomis nepriklausomojo kintamojo $x$ reikšmėmis mažai skiriasi nuo tiesės $y = x$.

Tangentoidė gerokai skiriasi nuo iki šiol matytų funkcijų grafikų — ji sudaryta iš be galo daugelio nesusijusių tarpusavyje dalių. Kai nepriklausomas kintamasis $x$ įgyja visas reikšmes iš intervalo $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, tai funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ įgyja visas realiąsias reikšmes. Ar įmanoma sudaryti panašią funkciją iš algebrinių reiškinių? Galima pasiūlyti patyrinėti, kaip atrodo funkcijos $g(x) = \frac{x}{(1+x)(1-x)}$ grafikas, kai $x$ įgyja reikšmes iš intervalo $(-1; 1)$.

Paprastų lygčių ir nelygybių su tangento funkcija sprendinių aibių struktūrą išsiaiškinti yra tikriausiai netgi paprasčiau negu sinuso ir kosinuso funkcijų atvejais. Ir čia verta parodyti sprendimą ir remiantis grafikais, ir geometriniais brėžiniais.

Skyrelio antrame pavyzdyje parodyta, kaip spręsti homogenines trigonometrines lygtis, suvedant jas į tiesines bei kvadratines lygtis. Pratimų ir uždavinių skyrelyje taip pat yra pateikta lygčių, kurios suvedamos į homogenines, pavyzdžiui, lygtis

$$6\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2.$$

***Suvokiame ir žinome:***

tangentoidės braižymo būdą;
tangento funkcijos savybes;
paprastų lygčių ir nelygybių sprendinių struktūrą.

***Mokame:***

braižyti tangento funkcijos (ir kitų paprastų iš tangento gautų funkcijų) grafikus;
spręsti paprastas lygtis ir nelygybes.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

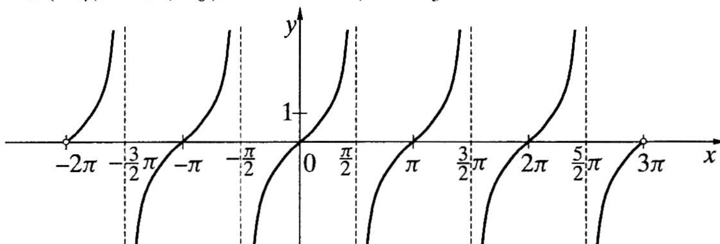
Skyrelio pratimai surikiuoti pagal tą pačią schemą, kaip ir ankstesniųjų skyrelių. Tik lygčių įvairovė didesnė: 82 pratime pateikta homogeninių, o 83 — suvedamų į homogenines lygčių. Verta išspręsti bent po vieną abiejų pratimų lygtį.

**71.** a) $x \neq \frac{3}{4}\pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; b) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x \neq \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; d) $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

**72.** a) $(-\infty; +\infty)$; b) $(-\infty; +\infty)$; c) $[0; +\infty)$; d) $[1; +\infty)$.

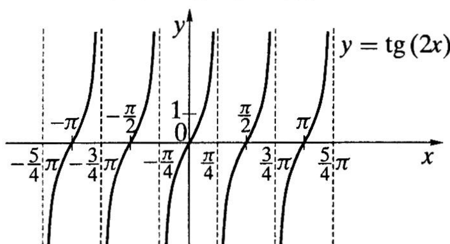
**73.** a) $\operatorname{tg}(-50°) < \operatorname{tg} 30° < \operatorname{tg} 50° < \operatorname{tg} 80°$;
b) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) < \operatorname{tg} 0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

**74.**

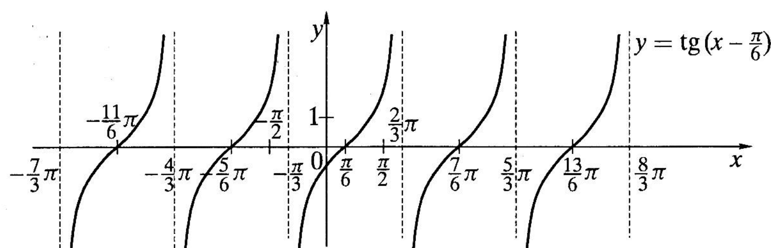



a) $\operatorname{tg} x = 1$, kai $x = -\frac{7}{4}\pi; -\frac{3}{4}\pi; \frac{\pi}{4}; \frac{5}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi$;
b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, kai $x = -\frac{5}{3}\pi; -\frac{2}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; \frac{4}{3}\pi; \frac{7}{3}\pi$;
c) $\operatorname{tg} x < -1$, kai $x \in \left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{5}{4}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; \frac{7}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{2}\pi; \frac{11}{4}\pi\right)$;
d) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$, kai $x \in \left(-2\pi; -\frac{3}{2}\pi\right) \cup \left[-\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}\pi; \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left[\frac{5}{3}\pi; \frac{5}{2}\pi\right) \cup \left[\frac{8}{3}\pi; 3\pi\right)$.

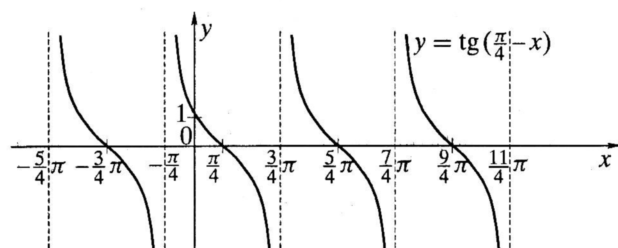
**75.** a) Funkcijos $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$ mažiausias teigiamas periodas yra $\frac{\pi}{2}$, apibrėžimo sritį nusako sąlyga $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, t. y. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Funkcijos reikšmių aibė — visa realiųjų skaičių aibė. Funkcija yra nelyginė. Kiekviename intervale $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, funkcija didėja.



b) Funkcijos $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ grafikas yra abscisių ašimi į dešinę atstumu $\frac{\pi}{6}$ pastumta tangentoidė $y = \operatorname{tg} x$. Funkcijos apibrėžimo sritį nusako sąlyga $x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, t. y. $x \neq \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. Funkcijos reikšmių aibė — visa realiųjų skaičių aibė. Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė; mažiausias teigiamas periodas $\pi$. Kiekviename intervale $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \frac{2\pi}{3} + \pi k\right)$, $k \in Z$, funkcija didėja.




c) Pirmiausiai reikėtų nubraižyti grafiką $y = \operatorname{tg}(-x)$, po to abscisių ašimi pastumti jį atstumu $\frac{\pi}{4}$ į dešinę pusę. Funkcija apibrėžta su visomis $x$ reikšmėmis, išskyrus $\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. Funkcijos reikšmių aibė — visa realiųjų skaičių aibė. Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė; mažiausias teigiamas periodas $\pi$. Kiekviename intervale $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$, funkcija mažėja.




**76.** a) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; b) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; c) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$;
d) $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

**77.** a) $f(x) = 1$, kai $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$;
$f(x) = -1$, kai $x = -\frac{7}{12}\pi + \pi k$, $k \in Z$;
b) $f(x) = 1$, kai $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;
$f(x) = -1$, kai $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;
c) $f(x) = 1$, kai $x = \frac{5}{36}\pi + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
$f(x) = -1$, kai $x = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
d) $f(x) = 1$, kai $x = \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$;
$f(x) = -1$, kai $x = -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$.

**78.** a) 0; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $-\frac{\pi}{4}$; d) $-\frac{\pi}{3}$.

**79.** a) $\frac{2}{3}\pi$; b) $-\frac{43}{60}\pi$.

**80.** a) $-\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; b) $\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$, $k \in Z$;
c) $-\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; d) $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
e) $-2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = 2\pi k$, $k \in Z$;
f) $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$.

**81.** a) $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;
b) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$, kai $-\pi + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$;
c) $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;
d) $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x \leqslant -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

**82.** a) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; b) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; c) $-\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;
d) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; e) $\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;
f) $\sin(3x)\cos(3x) + \sqrt{3}\cos^2(3x) = 0$, $\cos(3x)(\sin(3x) + \sqrt{3}\cos(3x)) = 0$;
kai $\cos 3x = 0$, tai $3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
kai $\cos x \neq 0$, tai $\sin(3x) + \sqrt{3}\cos(3x) = 0$, $\operatorname{tg}(3x) = -\sqrt{3}$, $3x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;

g) $-\operatorname{arctg}\frac{6}{5}+\pi k,\ k\in Z$;

h) abi lygties $\sin^2 x-2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$ puses padalijame iš $\cos^2 x$ (matome, kad $\cos x\neq 0$) ir gauname $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x-3=0$. Pažymėję $\operatorname{tg}x=m$, gauname kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai yra $m_1=3$ ir $m_2=-1$. Tada $\operatorname{tg}x=3$, $x=\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in Z$, ir $\operatorname{tg}x=-1$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

**83.** a) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ ir $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z$;

b) $x=\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\pi k,\ k\in Z$ ir $x=\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\pi k,\ k\in Z$;

c) $x=-\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in Z$ ir $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$;

d) $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ ir $k\in Z$ ir $x=-\operatorname{arctg}\frac{7}{4}+\pi k,\ k\in Z$;

e) $\sqrt{3}\sin(2x)\cos(2x)=1-\cos^2(2x)$, $\sqrt{3}\sin(2x)\cos(2x)-\sin^2(2x)=0$, $\sin(2x)\big(\sqrt{3}\cos(2x)-\sin(2x)\big)=0$;
kai $\sin(2x)=0$, tai $2x=\pi k$, $x=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$;
kai $\sin 2x\neq 0$, tai $\sqrt{3}\cos(2x)-\sin(2x)=0$, $\operatorname{tg}(2x)=\sqrt{3}$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$;

f) $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2$,
$3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2(\cos^2 x+\sin^2 x)$,
$\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$,
$\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg}x+3=0$,
$x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ ir $x=\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in Z$.

**84.** a) $\operatorname{arctg}(3x+1)=0$, kai $3x+1=0$, $x=-\frac{1}{3}$;

b) $\operatorname{arctg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, kai $x-\frac{\pi}{2}=1$, $x=1+\frac{\pi}{2}$.

# 15.9. Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$

Galima kiek pasamprotauti, kaip braižytume kotangento grafiką naudodamiesi panašiu brėžiniu, kurį naudojome tyrinėdami tangento funkciją. Tačiau redukcijos formulės išvaduoja mus nuo šio darbo.

Detaliai aptarkime visus grafiko transformavimo žingsnius. Galima užsiminti, kad tokia grafiko transformavimo schema praverčia ir kitais atvejais: šitaip iš funkcijos $y = x^3$ grafiko gaunamas funkcijos $y = -(x+a)^3$ grafikas ir apskritai — iš funkcijos $f(x)$ grafiko gaunamas $-f(x+a)$ grafikas.

***Suvokiame ir žinome:***

kaip iš tangentoidės gauti kotangento funkcijos grafiką;
kotangento funkcijos savybes;
paprastų lygčių ir nelygybių su kotangentu sprendinių struktūrą.

***Mokame:***

braižyti kotangento funkcijos (ir kitų iš jos gautų funkcijų) grafiką;
spręsti paprastas lygtis ir nelygybes.

## PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

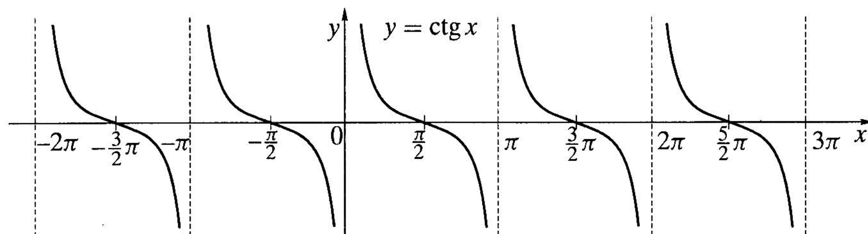
Uždaviniai išdėstyti panašiai kaip ankstesniame skyrelyje. Galima paminėti, jog trigonometrinės lygtys su kotangentu suvedamos į visai panašias lygtis su tangentu. Taigi — nieko iš esmės naujo!

**85.** a) $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; b) $x \neq \frac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x \neq \pi k,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; d) $x \neq \pi k,\ x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

**86.** a) $x = \boldsymbol{R}$; b) $x = \boldsymbol{R}$; c) $[0; +\infty)$; d) $[-1; +\infty)$.

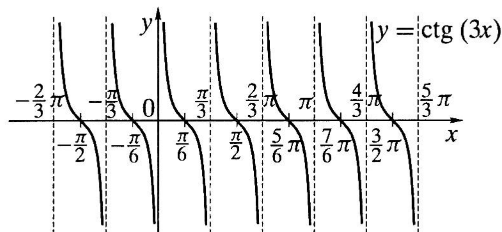
**87.** a) $\operatorname{ctg} 110° < \operatorname{ctg} 100° < \operatorname{ctg} 90° < \operatorname{ctg} 75° < \operatorname{ctg} 30° < \operatorname{ctg} 5°$;
b) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) < \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

**88.**

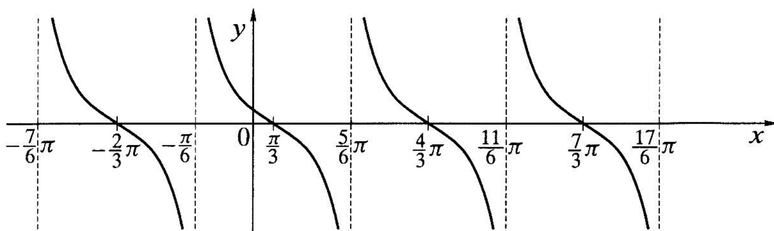



a) $\operatorname{ctg} x = 1$, kai $x = -\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{3}{4}\pi;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{5}{4}\pi;\ \frac{9}{4}\pi$;
b) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$, kai $x = -\frac{7}{6}\pi;\ -\frac{\pi}{6};\ \frac{5}{6}\pi;\ \frac{11}{6}\pi;\ \frac{17}{6}\pi$;
c) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$, kai $x \in \left(-2\pi; -\frac{5}{4}\pi\right] \cup \left(-\pi; -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left(0; \frac{3}{4}\pi\right] \cup \left(\pi; \frac{7}{4}\pi\right] \cup \left(2\pi; \frac{11}{4}\pi\right]$;
d) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$, kai $x \in \left[-\frac{11}{6}\pi; -\pi\right) \cup \left[-\frac{5}{6}\pi; 0\right) \cup \left[\frac{\pi}{6}; \pi\right) \cup \left[\frac{7}{6}\pi; 2\pi\right) \cup \left[\frac{13}{6}\pi; 3\pi\right)$.

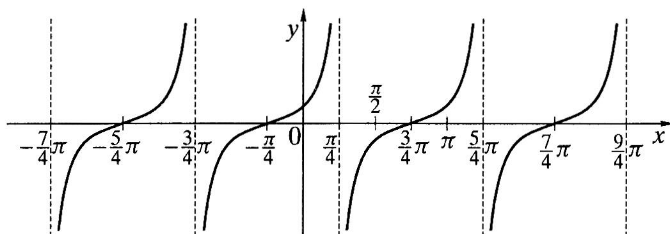
**89.** a) Funkcijos $f(x) = \operatorname{ctg}(3x)$ mažiausias teigiamas periodas yra $\frac{\pi}{3}$. Apibrėžimo sritį nusako sąlyga $3x \neq \pi k$, t. y. $x \neq \frac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}$. Funkcijos $f(x) = \operatorname{ctg}(3x)$ grafikas bus trigubai „suspausta“ išilgai $x$ ašies kotangentoidė $y = \operatorname{ctg} x$.




b) Funkcijos $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ grafikas bus kotangentoidė $y = \operatorname{ctg} x$ „pastumta“ abscisių ašimi į kairę atstumu $\frac{\pi}{6}$.
Apibrėžimo sritį nusako sąlyga $x + \frac{\pi}{6} \neq \pi k$, t. y. $x \neq -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.



c) Pirmiausiai reikėtų nubraižyti grafiką $y = \operatorname{ctg}(-x)$ ir po to abscisių ašimi pastumti jį į dešinę pusę atstumu $\frac{\pi}{4}$.




**90.** a) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; b) $\frac{3}{4}\pi + 3\pi k$, $k \in Z$;
c) $\frac{2}{9}\pi + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; d) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

**91.** a) $f(x) = 1$, kai $x = \frac{5}{12}\pi + \pi k$, $k \in Z$;
$f(x) = -1$, kai $x = \frac{11}{12}\pi + \pi k$, $k \in Z$;
b) $f(x) = 1$, kai $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
$f(x) = -1$, kai $x = \frac{2}{9}\pi + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
c) $f(x) = 1$, kai $x = \frac{7}{24}\pi + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;
$f(x) = -1$, kai $x = \frac{13}{24}\pi + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;
d) $f(x) = 1$, kai $x = \frac{1}{3}\operatorname{arcctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
$f(x) = -1$, kai $x = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{arcctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

**92.** a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{2}{3}\pi$; c) $\frac{\pi}{4}$.

**93.** a) $\frac{13}{8}\pi$; b) $\frac{51}{20}\pi$.

**94.** a) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; b) $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; c) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$;
d) $-\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; e) $3\pi k$, $k \in Z$; f) $-\pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

**95.** a) $\pi k < x \leqslant \frac{5}{6}\pi + \pi k$, $k \in Z$;
b) $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in Z$;
c) $2\operatorname{ctg} x > -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\pi k < x < \frac{2}{3}\pi + \pi k$, $k \in Z$;
d) $\frac{3}{4}\pi + \pi k \leqslant x < \pi + \pi k$, $k \in Z$.

**96.** a) $\sin(2x)\operatorname{tg} x = 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\sin(2x) = 0$ arba $\operatorname{tg} x = 0$. Iš lygties $\sin(2x) = 0$ gautos reikšmės $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, nėra lygties sprendiniai, nes nepriklauso jos apibrėžimo sričiai.
b) Lygties $\frac{\operatorname{ctg} x}{\cos x} = 0$ sprendiniai — tos $x$ reikšmės, su kuriomis $\operatorname{ctg} x = 0$, bet $\cos x \neq 0$. Tokių reikšmių nėra.
c) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$. Lygties sprendiniai — tos $x$ reikšmės, su kuriomis $\cos x \neq 0$, $\sin x = 1$. Tokių reikšmių nėra, nes jei $\sin x = 1$, tai $\cos x = 0$.
d) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x}$, $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$. Lygties sprendiniai — tos $x$ reikšmės, su kuriomis $\sin x \neq 0$, $\cos x = 1$. Tokių reikšmių nėra, nes jei $\cos x = 1$, tai $\sin x = 0$.
e) $\cos x \operatorname{tg}(2x) = 0$. Lygties apibrėžimo sritį nusako sąlyga: $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.
Sprendinius gauname iš lygčių $\cos x = 0$ ir $\operatorname{tg}(2x) = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ir $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Formulė $x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi(2k+1)}{2}$ tik pakartoja dalį sprendinių, užrašomų formule $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.
*Atsakymas.* a) $\pi k$, $k \in Z$; b) lygtis neturi sprendinių; c) lygtis neturi sprendinių; d) lygtis neturi sprendinių; e) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; f) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

**97.** a) $\operatorname{arcctg}(x + 2) = \frac{\pi}{6}$, tai $x + 2 = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{3} - 2$;
b) $\operatorname{arcctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$, tai $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{6}$.

## 15.10. Trigonometrinės formulės

Trigonometrinių formulių gausa baugina. Kita vertus, galima tvirtinti, kad yra tik kelios esminės formulės, o visa kita — išvados iš šių formulių. Taigi trigonometrinės formulės egzistuoja „šeimomis“, o tų šeimų ne tiek jau daug.

Pirmosios, ko gero svarbiausios, formulių šeimos „pramotė“ yra Pitagoro teorema. Naudodamiesi trigonometrinėmis funkcijomis šią formulę užrašome taip:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Šią formulę tikrai reikia atsiminti. Parodykime, kaip iš šios formulės gaunamas kitas naudingas sąryšis:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vienas iš šios formulių „šeimos“ taikymų — žinant tik vieną skaičiaus trigonometrinę funkciją (ir nustačius, kuriame ketvirtyje yra šį skaičių atitinkantis posūkio kampas) galima apskaičiuoti kitas trigonometrines funkcijas. Pirmame pavyzdyje parodyta, kaip tai daroma.

Kita formulių šeima — skaičių skirtumo (sumos) trigonometrinės funkcijos. Nubraižykime vienetinį apskritimą, pavaizduokime spindulius, su $Ox$ ašimi sudarančius kampus $0 < \beta < \alpha$, pažymėkime kampą $\alpha - \beta$. Iškelkime klausimą: kaip apskaičiuoti $\cos(\alpha - \beta)$, kai žinomos skaičių $\alpha$ ir $\beta$ reikšmės? Tegu moksleiviai suvokia, kad tai sudėtingas uždavinys. Galbūt net pasamprotauja, nuo ko reikėtų pradėti. Ir tada tegu pasirodo vektoriai — tartum „deus ex machina“! Tegu moksleiviai įvertina, kaip paprastai ir elegantiškai vektorių taikymas duoda reikiamą formulę.

Kai gauta pagrindinė „šeimos“ formulė, kitos pasipila tarsi iš kibiro. Galbūt verta pasiūlyti patiems moksleiviams išvesti keletą formulių, nurodant tik pradinius veiksmus.

Taip, beje, skyrelio tekste ir daroma — keletas formulių pasiūlyta išvesti patiems.

Reikia pabrėžti, kad visų šių formulių įsiminti tikrai neverta. Geriau įgyti šiek tiek praktikos išvedant vienas iš kitų. Kita vertus, kaip kad daugybos lentelės įsiminimas sutaupo laiko skaičiuojant, taip ir atsimenant pagrindines formules galima greičiau įžvelgti, kaip pertvarkyti ar suprastinti sudėtingus trigonometrinius reiškinius. Trigonometrinės formulės, kurias verta žinoti, skyrelyje įrėmintos.

Šiame vadovėlio skyriuje pateikta keletas trigonometrinių lygčių pavyzdžių. Atskiro trigonometrinėms lygtims skirto skyrelio nėra. Manyta, kad svarbiau pačios formulės, o lygtys — vienas iš „poligonų“, kuriuose galima gautas formules išbandyti.

***Suvokiame ir žinome:***

kaip įrodomos pagrindinės trigonometrinės formulės;

kaip gaunamos pagrindinių trigonometrinių formulių išvados;

dažniausiai taikomas trigonometrines formules.

***Mokame*** taikyti pagrindines trigonometrines formules skaičiuojant trigonometrinių funkcijų reikšmes, pertvarkant reiškinius, sprendžiant lygtis.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Paprasčiausių trigonometrinių formulių taikymams skirti pirmieji trys pratimai (98–100). Verta išspręsti bent po vieną dalį. Argumentų sumos ir skirtumo trigonometrinių funkcijų formulių prireiks sprendžiant 101–104 uždavinius. Likusieji pratimai daugiausia skirti dvigubo kampo trigonometrinių funkcijų formulėms (ir jų variantams). Galima pasirinkti pagal poreikį ir skonį.

**98.**

| $\alpha =$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $-\frac{2}{3}\pi$ | $210°$ | $315°$ | $-225°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha =$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\cos\alpha =$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha =$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-1$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha =$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | $-1$ | $-1$ |

**99.** a) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; b) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;
c) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; d) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;
e) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; f) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg} 4 + \pi k,\ k \in Z$;
g) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k,\ k \in Z$;
h) $\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - 3\cos(2\pi + x) = 4$, $\cos^2 x - 3\cos x - 4 = 0$. Pažymėję $\cos x = m$, gauname kvadratinę lygtį: $m^2 - 3m - 4 = 0$, $m_1 = 4$ ir $m_2 = -1$.
Kai $m = 4$, lygtis $\cos x = 4$ sprendinių neturi.
Kai $m = -1$, tai $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

**100.** a) $2\cos^2\alpha$; b) $2\sin^2\alpha$; c) 1; d) 1; e) 1;
f) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=$
$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=2\operatorname{tg}\alpha\cdot 2\operatorname{ctg}\alpha=4.$

**101.** a) $\sin(\alpha+\beta)=\frac{63}{65}$; $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{16}{65}$;
b) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.
$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha>0$, nes $\alpha$ yra II ketvirčio kampas.
Taigi $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$.
$\sin\beta=\frac{12}{13}$, $\cos\beta<0$, nes $\beta$ yra II ketvirčio kampas.
Taigi $\cos\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$.
Tada $\sin(\alpha-\beta)=\frac{16}{65}$; $\cos(\alpha-\beta)=\frac{63}{65}$.
c) Kai $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ $(270°<\alpha<360°)$ ir $\cos\beta=0{,}8$ $(270°<\beta<360°)$, tai $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{56}{33}$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{16}{63}$.

**102.** a) $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
d) $\cos 145°\cos 80°-\sin 145°\sin 80°=\cos(145°+80°)=\cos 225°=$
$\cos(180°+45°)=-\cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**103.** a) $\frac{\sin\alpha\cos 3\alpha+\sin 3\alpha\cos\alpha}{\cos 6\alpha\cos 2\alpha+\sin 6\alpha\sin 2\alpha}=\frac{\sin(3\alpha+\alpha)}{\cos(6\alpha-2\alpha)}=\frac{\sin(4\alpha)}{\cos(4\alpha)}=\operatorname{tg}(4\alpha)$;
c) $\frac{\cos 75°\cos 15°+\sin 75°\sin 15°}{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\cos(75°-15°)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\cos 60°}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$;
b), d), e) ir f) punktų tapatybės taip pat įrodomos remiantis kampų sumos (skirtumo) formulėmis.

**104.** a) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.
b) $\sin(6x)-\cos(2x)\sin(4x)=0$, $\sin(4x+2x)-\cos(2x)\sin(4x)=0$,
$\sin(4x)\cos(2x)+\cos(4x)\sin(2x)-\cos(2x)\sin(4x)=0$,
$\cos(4x)\sin(2x)=0$. Iš čia $\cos 4x=0$, $4x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$;
$\sin 2x=0$, $2x=\pi k$, $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.
c) Išsprendę lygtį gauname $x=\frac{\pi k}{8}$ ir $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. Atsakymą galima užrašyti viena formule: $x=\frac{\pi k}{8}$, $k\in Z$.
d) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7}$, $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$, $k\in Z$.

**105.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) 1;
f) $\operatorname{tg}22{,}5°=\operatorname{tg}\frac{45°}{2}=\frac{\sin\frac{45°}{2}}{\cos\frac{45°}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}}=$
$\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1}}=\sqrt{2}-1$;
arba: $\operatorname{tg}22{,}5°=\frac{\sin 22{,}5°}{\cos 22{,}5°}=\frac{2\sin 22{,}5°\cos 22{,}5°}{2\cos^2 22{,}5°}=\frac{\sin 45°}{1+\cos 45°}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=$
$\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{2}-1$.

**106.** a) $\cos\alpha+\sin\alpha$; b) $\cos\alpha$; c) $\cos 2\alpha$;
d) $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha-1}\cdot(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha-1}=$
$\frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{-(1-\sin\alpha\cos\alpha)}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$.

**107.** a) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}$, $k\in Z$; b) $\frac{\pi k}{8}$, $k\in Z$; c) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$;
d) $\cos 2x+\sin^2 x=1$, $\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^2 x-1=0$, $\cos^2 x-1=0$,
$-\sin^2 x=0$, $\sin x=0$, $x=\pi k$, $k\in Z$;
e) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

**108.** a) $4\sin 10°\cos 10°\cos 20°=\sin 40°$, $2\sin 20°\cos 20°=\sin 40°$;
b) $\cos 2°+\sin^2 1°=\cos^2 1°-\sin^2 1°+\sin^2 1°=\cos^2 1°$;
c) $\sin\alpha\cos^3\alpha-\cos\alpha\sin^3\alpha=\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=$
$\frac{1}{4}\sin 4\alpha$;
d) $\cos(10\alpha)-\cos^2(5\alpha)=-\sin^2(\pi-5\alpha)$, $2\cos^2(5\alpha)-1-\cos^2(5\alpha)=$
$-\sin^2(5\alpha)$, $\cos^2(5\alpha)-1=-\sin^2(5\alpha)$.

**109.** a) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; b) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; c) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$;
d) $\cos^2(2x)=0{,}75$, $\frac{1+\cos(4x)}{2}=\frac{3}{4}$, $1+\cos 4x=\frac{3}{2}$, $\cos 4x=\frac{1}{2}$,
$4x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

**110.** *Nurodymas*. Sprendžiame lygtį $f(x) = g(x)$.

a) $\sin^4 \frac{x}{2} = \cos^4 \frac{x}{2}$, $\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} = 0$, $\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 0$, $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

b) $\cos 2x = \cos^2 x$, $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$, $-\sin^2 x = 0$, $\sin x = 0$, $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

c) $\sin(2x) = -\sin(4x)$, $\sin(2x) + 2\sin(2x)\cos(2x) = 0$,
$\sin(2x)\big(1 + 2\cos(2x)\big) = 0$, $\sin(2x) = 0$, $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
$\cos(2x) = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

d) $\sqrt{3}\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, $\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$,
$\sin x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0$; kai $\sin x = 0$, tai $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
kai $\sin x \neq 0$, tai $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

*Atsakymas*. a) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; b) $\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; c) $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; d) $\pi k$, $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

**111.** a) $\cos(2x) + 5\sin(2x) = 5$,
$\cos^2 x - \sin^2 x + 10\sin x \cos x - 5\sin^2 x - 5\cos^2 x = 0$,
$-6\sin^2 x + 10\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$. Kadangi $\cos x \neq 0$ (priešingu atveju $\cos x = 0$, $\sin x = 0$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, — prieštara), tai $6\operatorname{tg}^2 x - 10\operatorname{tg} x + 4 = 0$. Pažymėję $\operatorname{tg} x = m$, gauname kvadratinę lygtį $3m^2 - 5m + 2 = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{2}{3}$. Tada $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, ir $x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

b) $4\sin x + 3\cos x = 5$,
$8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 5\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$,
$8\sin^2\frac{x}{2} - 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$,
$4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$, $\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0$, $2\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$,
$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ ir $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

c) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

d) $\sin(3x) - \cos^2(3x) = 1 + \cos(6x)$,
$\sin(3x) - \cos^2(3x) = 2\cos^2(3x)$,
$\sin(3x) - 3\cos^2(3x) = 0$,
$\sin(3x) - 3\big(1 - \sin^2(3x)\big) = 0$,
$3\sin^2(3x) + \sin(3x) - 3 = 0$.
Pažymėję $\sin(3x) = m$, gauname kvadratinę lygtį $3m^2 + m - 3 = 0$,
$m_1 = \frac{-1-\sqrt{37}}{6}$, $m_2 = \frac{-1+\sqrt{37}}{6}$.
Kai $m = \frac{-1-\sqrt{37}}{6}$, tai lygtis $\sin(3x) = \frac{-1-\sqrt{37}}{6}$ sprendinių neturi;
kai $m = \frac{-1+\sqrt{37}}{6}$, tai $\sin(3x) = \frac{-1+\sqrt{37}}{6}$ ir $x = (-1)^k\frac{1}{3}\arcsin\frac{-1+\sqrt{37}}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

## 15.11. Dar daugiau trigonometrinių formulių

Šiame skyrelyje pateikiama dar keletas formulių — išvadų iš ankstesnio skyrelio formulių. Naujai formulei gauti naudojamos dvi formulės, pavyzdžiui, sumos sinuso ir skirtumo sinuso.

Kam reikalinga funkcijų sumą keisti sandauga ar atvirkščiai? Išties, mokykliniame matematikos kurse šiomis formulėmis tik kartais remiamasi sprendžiant trigonometrines lygtis. Todėl daug dėmesio joms skirti neverta. Tiesa, žinoti, kad tokios formulės yra, pravartu. Mokantis integravimo universitetiniame matematikos kurse jos taikomos integruojant trigonometrinių funkcijų sandaugas.

***Suvokiame ir žinome*** kaip iš sumos ir skirtumo sinuso (kosinuso) formulių gaunamos sinusų (kosinusų) sumos (skirtumo) keitimo sandauga formulės.

***Mokame*** pritaikyti trigonometrinių funkcijų sumos (skirtumo) keitimo sandauga formules paprastoms trigonometrinėms lygtims spręsti.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Skyrelyje pateiktos dvi formulių grupės: vienos grupės formulėse funkcijų suma keičiama sandauga, kitos grupės — atvirkščiai. Pirmos grupės formulėms skirta dauguma pratimų (112–121), antros grupės formulėms — 122–125 pratimai. Visų pratimų išspręsti, žinoma, nebūtina, tačiau keletą — naudinga.

**112.** a) $2\sin 50^\circ \cos 10^\circ$; b) $-2\sin\frac{3\pi}{16}\sin\frac{\pi}{16}$; c) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$;
d) $-2\sin 15^\circ\cos(\alpha+15^\circ)$; e) $\sqrt{3}\sin\alpha$; f) $-\sqrt{2}\sin\alpha$.

**113.** *Nurodymas.* Pertvarkyti galima arba kairiąją, arba dešiniąją lygybės pusę.
a) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;
b) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta$.

**114.** a) $\frac{\sin 70^\circ}{\cos 30^\circ\cos 40^\circ}=\frac{2\sin 70^\circ}{\sqrt{3}\cos 40^\circ}$; b) $\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{5}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}}$.

**115.** a) $\frac{\sin(2\alpha)+\sin(6\alpha)}{\cos(2\alpha)+\cos(6\alpha)}=\frac{2\sin(4\alpha)\cos(-2\alpha)}{2\cos(4\alpha)\cos(-2\alpha)}=\operatorname{tg}(4\alpha)$;
b) $\frac{\sin\alpha+\sin(5\alpha)}{\cos\alpha+\cos(5\alpha)}=\frac{2\sin(3\alpha)\cos(-2\alpha)}{2\cos(3\alpha)\cos(-2\alpha)}=\operatorname{tg}(3\alpha)$;
c) $\sin 40^\circ+\sin 20^\circ-\cos 10^\circ=2\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 10^\circ=$
$2\cdot\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\cos 10^\circ=\cos 10^\circ-\cos 10^\circ=0$;
d) $\cos 35^\circ-\cos 25^\circ+\cos 85^\circ=-2\sin 30^\circ\sin 5^\circ+\cos(90^\circ-5^\circ)=$
$-2\cdot\frac{1}{2}\sin 5^\circ+\sin 5^\circ=-\sin 5^\circ+\sin 5^\circ=0$.

**116.** a) $\cos\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$;

b) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{2}}{\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$.

Arba: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{2\sin^2\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}$.
Galima skaičiuoti ir dar kitaip:
$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2}=2-\sqrt{3}$.
c) $\sin\frac{13\pi}{12}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}=-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$
$-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$;
d) $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$;
e) $\sin\frac{17}{12}\pi=\sin\left(\pi+\frac{5}{12}\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;
f) $\operatorname{tg}\frac{7}{8}\pi=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=-\sqrt{2}+1$.

**117.** a) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; b) $\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; c) $\frac{\pi k}{3}$, $\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$;
d) $\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$.

**118.** a) $15^\circ+360^\circ k$, $k\in Z$.
b) Pritaikę kosinusų skirtumo formulę lygtį $\cos(45^\circ+x)-\cos(15^\circ-x)=1$ pertvarkome taip: $-2\sin 30^\circ\cdot\sin(15^\circ+x)=1$. Iš čia $\sin(15^\circ+x)=-1$, $15^\circ+x=-90^\circ+360^\circ k$ arba $x=-105^\circ+360^\circ k$, $k\in Z$.
c) Pirmiausiai pritaikę redukcijos formulę lygtį $\sin(2x)+\sin(\pi-8x)=\sqrt{2}\cos(3x)$ pertvarkome taip: $\sin(2x)+\sin(8x)=\sqrt{2}\cos(3x)$. Pritaikę sinusų sumos formulę ir iškėlę bendrąjį dauginamąjį prieš skliaustus, gauname lygtį: $\cos(3x)\left(2\sin(5x)-\sqrt{2}\right)=0$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$ arba $x=(-1)^k\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}$, $k\in Z$.
d) $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$.

**119.** a) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 20° = 2\sin 30° \cdot \cos(-20°) - \cos 20° =$
$\cos 20° - \cos 20° = 0$;
b) $\cos 85° + \cos 35° - \cos 25° = 2\cos 60° \cdot \cos 25° - \cos 25° =$
$\cos 25° - \cos 25° = 0$.

**120.** a) $\sin\alpha + \cos(2\alpha) + \sin(3\alpha) + \cos(4\alpha) =$
$\big(\sin\alpha + \sin(3\alpha)\big) + \big(\cos(2\alpha) + \cos(4\alpha)\big) =$
$2\sin(2\alpha)\cos(-\alpha) + 2\cos(3\alpha)\cos(-\alpha) = 2\cos\alpha\big(\sin(2\alpha) + \cos(3\alpha)\big) =$
$2\cos\alpha\big(\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + \cos(3\alpha)\big) = 2\cos\alpha \cdot 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-5\alpha}{2} =$
$4\cos\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5}{2}\alpha\right)$;
b) $4\cos\beta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\beta}{2}\right)$.

**121.** *Nurodymas.* a) ir b) punktus galima spręsti taikant sinusų sumos formules, o c) ir d) — laipsnio žeminimo, o po to — kosinusų sumos (skirtumo) formules.
*Atsakymas.* a) $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}, \pi$; b) $0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$; c) $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10}$.
d) Pritaikę laipsnio žeminimo formulę lygtį
$\sin^2 x + \sin^2(2x) - \sin^2(3x) - \sin^2(4x) = 0$ pertvarkome taip:
$\frac{1-\cos(2x)}{2} + \frac{1-\cos(4x)}{2} - \frac{1-\cos(6x)}{2} - \frac{1-\cos(8x)}{2} = 0$,
$1 - \cos(2x) + 1 - \cos(4x) - 1 + \cos(6x) - 1 + \cos(8x) = 0$,
$\cos(8x) - \cos(2x) + \cos(6x) - \cos(4x) = 0$.
Pritaikę kosinusų skirtumo formulę iš pastarosios lygties gauname lygtį:
$-2\sin(5x)\sin(3x) - 2\sin(5x)\sin x = 0$. Iškėlę bendrąjį dauginamąjį prieš skliaustus, gauname: $x = \frac{\pi k}{5}$, $x = \frac{\pi k}{2}$ ir $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
Iš sprendinių $x = \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$, išrenkame tuos, kurie priklauso intervalui $[0; \pi]$: $0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi$ (kai $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Analogiškai iš sprendinių $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, gauname sprendinius: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ (kai $k = 0, 1, 2$), o iš sprendinių $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, gauname sprendinį $\frac{\pi}{2}$ (kai $k = 0$).
Taigi intervalui $[0; \pi]$ priklauso šie sprendiniai: $0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi$.

**122.** *Nurodymas.* Taikykite trigonometrinių funkcijų sandaugos keitimo suma formules.
a) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$.
*Pastaba.* Punktai b) ir c) yra vienodi, todėl siūlome punkto c) sąlygą pakeisti, pvz., taip:
c) $\sin 7°30' \cdot \sin 52°30' = \frac{1}{2}\big(\cos(-45°) - \cos 60°\big) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$.
d) $\cos 67°30' \cdot \cos 7°30' = \frac{1}{2}(\cos 75° + \cos 60°) = \frac{1}{2}\big(\cos(45° + 30°) + \frac{1}{2}\big) =$
$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{8}$.

**123.** a) $2\cos\alpha\sin(3\alpha)\sin(2\alpha) = 2 \cdot \frac{1}{2}\big(\sin(4\alpha) + \sin(2\alpha)\big) \cdot \sin(2\alpha) =$
$\sin(4\alpha) \cdot \sin(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) = \frac{1}{2}\big(\cos(2\alpha) - \cos(6\alpha)\big) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4\alpha) =$
$\frac{1}{2}\cos(2\alpha) - \frac{1}{2}\cos(6\alpha) - \frac{1}{2}\cos(4\alpha) + \frac{1}{2}$;
b) $\sin(9\alpha) - \sin\alpha - \sin(7\alpha) + \sin(3\alpha)$;
c) $\frac{1}{2}\sin(4\alpha) + \frac{1}{2}\sin(2\alpha) - \frac{1}{2}\sin(6\alpha)$;
d) $1 + \cos(6\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(2\alpha)$.

**124.** a) Pritaikę kosinusų sandaugos keitimo suma formulę, iš lygties
$\cos x\cos(3x) = -\frac{1}{2}$ gauname lygtį:
$\frac{1}{2}\big(\cos(4x) + \cos(-2x)\big) = -\frac{1}{2}$,
$\cos(4x) + \cos(-2x) = -1$. Iš čia $2\cos^2(2x) - 1 + \cos 2x = -1$,
$2\cos^2(2x) + \cos 2x = 0$, $\cos(2x)\big(2\cos(2x) + 1\big) = 0$;
$\cos(2x) = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;
$2\cos(2x) + 1 = 0$, $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.
Analogiškai sprendžiami ir likę punktai.
*Atsakymas.* a) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; b) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;
c) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; d) $\pi k$, $k \in Z$.

**125.** a) $8\cos 80°\cos 40°\cos 20° = 8 \cdot \frac{1}{2}(\cos 100° + \cos 60°) \cdot \cos 40° =$
$4\cos 100° \cdot \cos 40° + 4 \cdot \frac{1}{2}\cos 40° = 4 \cdot \frac{1}{2}(\cos 140° + \cos 60°) + 2\cos 40° =$
$2\cos 140° + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2\cos 40° = 2\big(\cos(180° - 40°)\big) + 1 + 2\cos 40° =$
$-2\cos 40° + 1 + 2\cos 40° = 1$;
b) $8\sin 70°\sin 50°\sin 10° = 8 \cdot \frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 80°) \cdot \sin 50° =$
$4\cos 60° \cdot \sin 50° - 4\cos 80°\sin 50° =$
$4 \cdot \frac{1}{2}\sin 50° - 4 \cdot \frac{1}{2}\big(\sin 130° + \sin(-30°)\big) = 2\sin 50° - 2\sin 130° + 2 \cdot \sin 30° =$
$2\sin 50° - 2\sin(180° - 50°) + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\sin 50° - 2\sin 50° + 1 = 1$.

# 16. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

**1.** $72°$, $80°$, $66,(6)°$, $684°$.

**2.** $\frac{\pi}{15}$, $-\frac{2}{3}\pi$, $\frac{20}{9}\pi$, $-\frac{79}{40}\pi$.

**3.** a) $12,5\pi$ cm, $312,5\pi$ cm$^2$; b) $33,(3)\pi$ cm, $833,(3)\pi$ cm$^2$; c) $20\pi$ cm, $500\pi$ cm$^2$; d) $18,75$ cm, $468,75$ cm$^2$.

**4.** $\frac{23}{60}\pi$.

**5.** $102°$.

**6.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Apskritimo spindulys | 6 cm | 8 cm | 24 cm | $\frac{396}{\pi}$ dm | 2,4 m | $\frac{120}{7\pi}$ m |
| Lanko didumas | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $15°$ | $10°$ | $1\frac{17}{24}$ | $\frac{7\pi}{12}$ |
| Lanko ilgis | $2\pi$ cm | $1\frac{1}{3}\pi$ cm | $2\pi$ cm | 22 dm | 4,1 m | 10 m |

**7.** a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$;
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$;
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\operatorname{ctg}\alpha = -1$;
d) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$.

**8.** a) $\frac{9-2\sqrt{3}}{6}$, $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$, $1$; b) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$, $-\frac{\sqrt{2}+2}{2}$, $\frac{\sqrt{3}-6}{6}$.

**9.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1$, $-\frac{1}{2}$, $-1$; b) $1,5$; $1,5$; $1$.

**10.** *Nurodymas.* Taikykite redukcijos formules.

**11.** a) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$; b) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; c) $-\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$; d) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; e) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; f) $1$; g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**12.** a) $\sin(-45°) < \sin 0° < \sin 10° < \sin 60° < \sin 85°$;
b) $\cos\frac{7\pi}{8} < \cos\frac{11\pi}{8} < \cos\frac{\pi}{2} < \cos\frac{13\pi}{8} < \cos\frac{9\pi}{4}$.

**13.** a) $-\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$; b) $1$; c) $1+\sqrt{3}$; d) $5,5$.

**14.** a) $+$; b) $-$; c) $+$; d) $-$.

**15.** a) $\sin 30° - \sin 35° < \cos 30° - \cos 35°$;
b) $\operatorname{tg} 50° - \operatorname{tg} 10° > \operatorname{ctg} 50° - \operatorname{ctg} 10°$.

**16.** a) 1; b) 1; c) 1; d) 1.

**17.** *Nurodymas.* Abi lygties puses dalijame (įrodę, kad $\cos x \neq 0$) iš:
a) $\cos x$; b) $\cos x$; c) $\cos^2 x$; d) $\cos^2 x$.
*Atsakymas.* a) $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; b) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;
c) $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$ ir $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in Z$;
d) $x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$ ir $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

**18.** *Nurodymas.* Spręsdami a) ir b) punktus, iškeliame prieš skliaustus bendrą dauginamąjį; spręsdami c)–e) — abi lygties puses dalijame (įrodę, kad $\cos \neq 0$) iš: c) $\cos^2\frac{x}{4}$; d) $\cos^2(10x)$; e) $\cos^2(5x)$.
a) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; b) $x = 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;
c) $x = -4\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 4\pi k$, $x = 4\operatorname{arctg} 2 + 4\pi k$, $k \in Z$; d) $x = \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{10}$, $x = \frac{1}{10}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{10}$, $k \in Z$; e) $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$, $x = -\frac{1}{5}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$.

**19.** a) $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$;
b) $x = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 1) + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{3}) + \pi k$, $k \in Z$;
c) $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;
d) $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

**20.** a) $x = \pi k$, $k \in Z$; b) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; c) lygtis sprendinių neturi; d) lygtis sprendinių neturi; e) lygtis sprendinių neturi;
f) lygtis sprendinių neturi; g) $x = \pi k$, $k \in Z$; h) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

**21.** a) $-\frac{31}{20}$; b) $\frac{8}{15}$.

**22.** a) $-\frac{27}{20}$; b) $\frac{29}{15}$.

**23.** *Nurodymas.* Taikykite redukcijos formules.
a) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$; b) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;
c) $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$;
d) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

**24.** a) $\sin(9\alpha)$; b) $\cos(2\alpha)$.

**25.** a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{1}{8}$.

**26.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{11}{16}$.

**27.** a) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;
b) $x = \pi k,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; c) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$;
d) $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

**28.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{4\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{8}$; d) $\frac{\pi}{2}$.

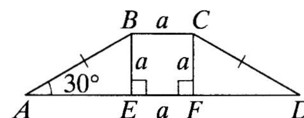
**29.** a) $\frac{\pi}{12}$; b) $\frac{\pi}{12}$ ir $\frac{5\pi}{12}$; c) 5; d) 1 ir 3.

**30.** a) $\sin(2\alpha)$; b) $-\sin(12\alpha)$; c) $-\sin(10\alpha)$; d) $\cos(12\alpha)$.

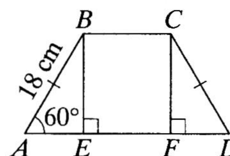
**31.** a) $2\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$;
c) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{6}\right)$; d) $2\cos^2\frac{\alpha}{6}$; e) $4\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$;
f) $4\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

**33.** a) $x = \frac{2}{3}\pi k,\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7},\ k \in Z$; b) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k,\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi k,\ k \in Z$;
c) $x = 2\pi k,\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z$;
d) $x = \frac{2}{3}\pi k,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

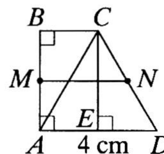
**34.** $AB = 2a$ (statinio, esančio prieš 30° kampą, savybė).
Tada $AE = FD = 2a\cos 30° = \sqrt{3}a$ ir $AD = a + 2\sqrt{3}a$.
Trapecijos vidurinės linijos ilgis lygus:
$\frac{BC+AD}{2} = \frac{a+a+2\sqrt{3}a}{2} = \frac{2a+2\sqrt{3}a}{2} = a(1+\sqrt{3})$.
Trapecijos plotas lygus $a(1+\sqrt{3})\cdot a = a^2(1+\sqrt{3})$.




**35.** Nubrėžiame trapecijos aukštines $BE$ ir $CF$. $\triangle BEA$ — statusis, $\angle ABE = 30°$, $AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 18 = 9$ (cm).
Pagal sąlygą $BC + AD = 2BC + 2AE = 34$ cm.
Tada $2BC = 34 - 2\cdot 9 = 16$ ir $BC = 8$ cm; $AD = 34 - 8 = 26$ (cm). Trapecijos plotas $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}\cdot BE$. Iš stačiojo trikampio $BEA$:
$BE = AB\sin 60° = 18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ (cm).
Tada $S_{ABCD} = \frac{8+26}{2}\cdot 9\sqrt{3} = 153\sqrt{3}$ (cm$^2$).
*Atsakymas.* 26 cm, 8 cm, $153\sqrt{3}$ cm$^2$.




**36.** $CE$ — lygiakraščio trikampio $ACD$ aukštinė ir pusiaukraštinė. $ABCE$ — stačiakampis, $BC = AE = 2$ cm. Tada $MN = \frac{BC+AD}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ (cm).



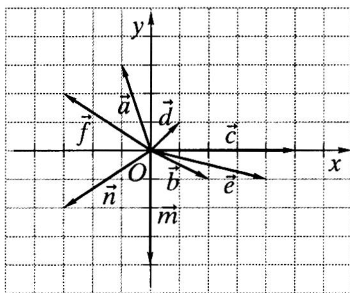

**37.** Proporcingumo koeficientas $k = \frac{42}{28} = \frac{3}{2}$. Ieškomo keturkampio kitų kraštinių ilgiai yra $12\cdot\frac{3}{2} = 18$ (cm), $15\cdot\frac{3}{2} = 22{,}5$ (cm), $6\cdot\frac{3}{2} = 9$ (cm).

**38.** Paveiksle pavaizduoto sklypo plano plotas $S = \frac{1}{2}(10+15)\cdot 12 = 150$ (cm$^2$).
Sklypo plotas yra $1000^2$ kartų didesnis, t. y.
$150\cdot 1\,000\,000 = 150\,000\,000$ (cm$^2$) $= 15\,000$ (m$^2$) $= 1{,}5$ (ha).

**39.** Panašiųjų daugiakampių proporcingumo koeficientas lygus $\frac{3}{2}$. Daugiakampių plotų santykis lygus $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Tada ieškomo daugiakampio plotas lygus $9\cdot\frac{9}{4} = 20{,}25$ (dm$^2$).

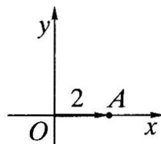
**40.** Vektoriai yra simetriški:
a) $Ox$ ašies atžvilgiu; b) koordinačių pradžios taško atžvilgiu;
c) $Oy$ ašies atžvilgiu.

**41.**



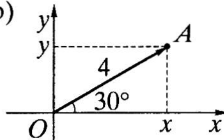

**42.** Pažymėkime $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

a)




Taigi $\vec{a}(2; 0)$.

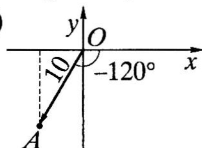
b)




$x = 4\cos 30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$. Taigi $\vec{a}(2\sqrt{3}; 2)$.

Analogiškai sprendžiami c) ir e) punktai.

f)




$x = 10\cos(-120°) = 10\cos 120° = 10\cos(180° - 60°) = -10\cos 60° = -10 \cdot \frac{1}{2} = -5$;

$y = 10\sin(-120°) = -10\sin 120° = -10\sin(180° - 60°) = -10\sin 60° = -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3}$.

*Atsakymas.* a) $\vec{a}(2; 0)$; b) $\vec{a}(2\sqrt{3}; 2)$; c) $\vec{a}(3; 3)$; d) $\vec{a}(3; -3\sqrt{3})$; e) $\vec{a}(0; 5{,}5)$; f) $\vec{a}(-5; -5\sqrt{3})$.

**43.** *Nurodymas.* Sprendžiame sistemą:

a) $\begin{cases} x - 1 = 2, \\ 2y + 1 = 7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2 = -x, \\ -(y - 1) = 2y; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0, \\ -x + 2y - 9 = 0. \end{cases}$

*Atsakymas.* a) $x = 3$, $y = 3$; b) $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$; c) $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$; d) $x = 5$, $y = 7$.

**44.** a) $(13; -1)$; b) $(8{,}5; -15{,}5)$; c) $(-5; 25)$; d) $(-114; 30)$.

**45.** a) $\overrightarrow{AB}(-7; -4)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{65}$;

b) $\overrightarrow{AB}(3; -5)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$;

c) $\overrightarrow{AB}(-2{,}4; -9)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2{,}4)^2 + (-9)^2} = \sqrt{86{,}76}$.

d) Kai $A(0; -7)$ ir $B\left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$, tai $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{2}{5}; 7\frac{3}{5}\right)$,

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{38}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{1448}}{5}$.

**46.** Tegu $N(x; y)$.

a) $\overrightarrow{MN}(x - 3; y - 0)$. Sprendžiame sistemą:

$\begin{cases} x - 3 = -3, \\ y - 0 = 2{,}6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = 2{,}6. \end{cases}$

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai.

*Atsakymas.* a) $N(0; 2{,}6)$; b) $N(7; 2)$; c) $N(0; -1)$; d) $N(3{,}3; -5{,}5)$.

**47.** $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

**48.** Funkcijos $f(x) = x^2 - 2ax$ grafikas yra parabolė, kurios viršūnės abscisė $x_0 = a$. Jei $a \leqslant 0$, tai mažiausioji funkcijos reikšmė $f(0) = 0 \neq -4$. Jei $a \geqslant 3$, tai mažiausioji funkcijos reikšmė $f(3) = 9 - 6a$, $9 - 6a = -4$, kai $a = \frac{13}{6} < 3$. Tai prieštarauja sąlygai, kad $a \geqslant 3$. Vadinasi, lieka atvejis, kai $0 < a < 3$. Tada mažiausioji funkcijos reikšmė
$f(a) = a^2 - 2a^2 = -a^2$, $-a^2 = -4$, kai $a = 2$.
*Atsakymas.* $a = 2$.

**49.** Tarkime, kol Linas suskaičiuoja 30 laiptelių (t. y. užkopia 30 laiptelių), eskalatorius pakyla $x$ laiptelių. Tada, kol jis bėgdamas žemyn suskaičiuoja 150 laiptelių, eskalatorius pakyla $5x$ laiptelių. Jeigu eskalatorius būtų išjungtas, Linui tektų suskaičiuoti visus $x + 30$ laiptelių. Iš lygybės $x + 30 = 150 - 5x$, gauname $x = 20$, $x + 30 = 50$.
*Atsakymas.* 50 laiptelių.

**50.** Pažiūrėję į antrąją lygtį įsitikinsime, kad jei $(x; y)$ yra duotosios sistemos sprendinys, tai $y > 0$. Taigi galima spręsti sistemą $\begin{cases} 4y + 7x = -12, \\ 6|x| + 8 = |x|y + 4y. \end{cases}$
Išreiškę iš pirmosios lygties $y = -3 - \frac{7}{4}x$ ir įstatę į antrąją, gausime lygtį su vienu nežinomuoju $x$.
*Atsakymas.* $(-4; 4)$.

**51.** Pastebėkime, kad jei vienas iš nežinomųjų $x$, $y$, $z$ lygus nuliui, tai ir kiti lygūs nuliui. Taigi trejetas $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ tenkina lygtį. Vadinasi, vieną sandaugos reikšmę $x \cdot y \cdot z = 0$ radome.
Tegu dabar nei vienas iš nežinomųjų nelygus nuliui. Sudauginę lygčių kairiąsias ir dešiniąsias puses bei suprastinę gautąją lygybę iš $xyz \neq 0$, gausime, kad $xyz = 4 \cdot 9 \cdot 16 = 576$.
*Atsakymas.* 0 ir 576.

**52.** Kadangi $\sqrt{y} = \sqrt{x} - 10$, tai
$x - 2y = x - 2(\sqrt{x} - 10)^2 = x - 2x + 40\sqrt{x} - 200 = -x + 40\sqrt{x} - 200$.
Išskiriame pilnąjį kvadratą:
$-(x - 40\sqrt{x} + 400) + 200 = 200 - (\sqrt{x} - 20)^2 \leqslant 200$.

**53.** Galima lygtį sudaryti taip: $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 0$, $(x-\sqrt{3})^2-2 = 0$, $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.
Galima remtis atvirkštine Vijeto teorema: kadangi
$p = -(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) = -2\sqrt{3}$, $q = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$,
tai lygties $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ sprendiniai yra $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ir $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.
*Atsakymas.* $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.

**54.** Pertvarkę duotąją nelygybę, gauname: $(3 + a)x \leqslant 2a$.
Jei $3 + a > 0$, t. y. $a > -3$, tai nelygybės sprendiniai $x \leqslant \frac{2a}{3+a}$.
Jei $a = -3$, tai gauname neturinčią sprendinių nelygybę $0 \cdot x \leqslant -6$.
Jei $a < -3$, tai nelygybės sprendiniai yra $x \geqslant \frac{2a}{3+a}$.
*Atsakymas.* Jei $a < -3$, tai $x \geqslant \frac{2a}{3+a}$; jei $a = -3$, tai nelygybė sprendinių neturi; jei $a > -3$, tai $x \leqslant \frac{2a}{3+a}$.

**55.** Jeigu $x$ yra tėvo amžius, tai $\frac{1}{8}x$ — sūnaus amžius. Tada $3\left(\frac{1}{8}x + 10\right) = x + 10$.
*Atsakymas.* 32 metai.

**56.** Padauginę funkcijos $f(x)$ reiškinio trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš $x+\sqrt{x^2+1}$, gausime: $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)} + x + \sqrt{x^2+1} = 0$ su visais $x$.
*Atsakymas.* $f(2002) = 0$.

**57.** a) Pažymėję $y = 3^{\lg x}$, duotąją lygtį užrašome taip:
$y + \frac{3}{y} = 4$, $y^2 - 4y + 3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$.
Taigi $3^{\lg x} = 1$, $x_1 = 1$; $3^{\lg x} = 3$, $x_2 = 10$.
b) Pertvarkykime duotąją lygtį:
$\lg 2^x + \lg(2^x - 2) = \lg(10 \cdot 8)$, $\lg(2^x \cdot (2^x - 2)) = \lg 80$. Iš čia $2^x(2^x - 2) = 80$.
Pažymėję $2^x = y$, gauname kvadratinę lygtį.
*Atsakymas.* a) $x_1 = 1$, $x_2 = 10$; b) $x = \log_2 10$.

**58.** a) Iš pirmos lygties $y = 2+2x$, ir antra lygtis virsta $\log_5(x+2) = \log_5(x+2)$. Aišku, kad jos sprendiniai $x > -2$. Vadinasi, sistemos sprendiniai yra $(x; 2x+2)$, $x > -2$.
Kas mėgsta įsivesti parametrą, gali samprotauti taip. Kiekvieną reikšmę $x = t$ atitinka $y$ reikšmė $y = 2 + 2t$, ir sprendinius galima užrašyti taip: $(t; 2t+2)$, $t > -2$.

b) Iš antrosios lygties gauname, kad $x = y^2$. Įstatę į pirmąją lygtį, gauname: $x^2 + x = 272$. Ši lygtis turi du sprendinius: $x_1 = -17$, $x_2 = 16$. Sprendinys $x = -17$ netinka (nes iš antros lygties $x > 0$). Lieka $x = 16$, $y = 4$, ir šis sprendinys tinka.

*Atsakymas.* a) $(t; 2t+2)$, $t \in (-2; +\infty)$; b) $(16; 4)$.

**59.** a) Nelygybę galima pakeisti dviem sistemomis:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x > 1 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x - 2 < 0, \\ x > 0, \\ x < 1. \end{cases}$$

b) Nelygybę galima pakeisti nelygybe
$\log_4 \frac{2x-1}{x-2} > \frac{1}{2}$ arba $\frac{2x-1}{x-2} > 2$.

*Atsakymas.* a) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$; b) $(2; +\infty)$.

# 17. SKAIČIŲ SEKOS

## 17.1. Skaičių sekos ir jų reiškimo būdai

Skaičių sekos vadovėlyje apibrėžiamos kaip funkcijos, kurių nepriklausomasis kintamasis įgyja natūraliasias reikšmes. Tai pats trumpiausias ir, logikos požiūriu, nepriekaištingas apibrėžimas. Tačiau dažnai būna taip, kad apibrėžus matematinę sąvoką, ji įsivaizduojama remiantis apibrėžimui neprieštaraujančiais, tačiau „labiau apčiuopiamais“ vaizdiniais. Ir skaičių seka įsivaizduojama kaip nepabaigiama skaičių eilė. Išties, jeigu surašytume visas sekos $a(n)$ reikšmes, atitinkančias argumento reikšmes $n = 1, 2, \ldots$, tai priskyrimo taisyklė būtų visiškai nusakyta. Pavyzdžiui, pažiūrėję į skaičių eilę

$$2,\ 4,\ 6, \ldots, 2n, \ldots$$

žinome, kad kintamojo reikšmei $n = 3$ priskiriama reikšmė lygi 6 ir t. t. Taigi skaičių seką $a(n)$ galima įsivaizduoti kaip begalinę skaičių eilę

$$a(1),\ a(2),\ a(3),\ a(4),\ \ldots,$$

kurią galima užrašyti ir taip (sutaupome daug skliaustų!):

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

Dažnai sutinkamos ir baigtinės sekos. Šias sekas galima interpretuoti kaip funkcijas, apibrėžtas natūraliųjų skaičių aibės „pradžioje“, t. y. aibėse $\{1, 2, \ldots, m\}$. Paminėkime, kad sekos apibrėžiamos remiantis tais pačiais būdais, kaip ir funkcijos, kurių apibrėžimo sritys — realiųjų skaičių intervalai (arba visa realiųjų skaičių aibė). Pavyzdžiui, formule $a(x) = x^2$ galima apibrėžti ir seką $a(n) = n^2$. Tačiau sekas apibrėžiančios formulės užrašomos šiek tiek kitaip ir vadinamos bendrojo nario formulėmis:

$$a_n = n^2.$$

Galima paminėti, kad turint vieną formulę, su ja galima apibrėžti daug visokių sekų. Pavyzdžiui, remdamiesi formule $a(x) = x^2$, apibrėžkime keletą naujų sekų:

$$b_n = a(n+1) = (n+1)^2,$$
$$c_n = a(2n+1) = 4n^2 + 4n + 1,$$
$$d_n = a\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

ir t. t.

Yra sekos apibrėžimo būdas, su kuriuo dar nesusidūrėme: rekurentinės formulės. Apibrėžiant skaičių seką rekurentiškai, eilinis sekos narys skaičiuojamas remiantis „sekos praeitimi“, t. y. nariais su mažesniais eilės numeriais.

Galima pabrėžti, kad apibrėžti sekas rekurentiškai visai nesunku, tačiau dažnai nelengva taip apibrėžtas sekas tyrinėti. Pasiūlykite apibrėžti keletą sekų rekurentiškai. Kartais visai paprasta rekurentine lygybe apibrėžta seka turi daug įdomių savybių. Pavyzdys — Fibonačio seka. Leidžiamas net atskiras žurnalas, kuriame spausdinami straipsniai apie Fibonačio sekos savybes!

***Suvokiame ir žinome:***

sekos sąvoką;

sekos apibrėžimo būdus.

***Mokame*** naudotis sekos bendruoju nariu ar rekurentine formule apskaičiuojant sekos narius, tyrinėjant kai kurias paprastas sekų savybes.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Svarbiausia uždavinių tema — apskaičiuoti apibrėžtos sekos narių reikšmes, kai duoti jų numeriai. Jai skirti 126–128, 130, 132–134 uždaviniai. Turbūt daugiau dėmesio verta skirti rekurentiškai apibrėžtoms sekoms. Viena vertus, tai naujas dalykas, kita vertus — įžanga į progresijų temą.

**126.** 1, 4, 9, 16, 25, 36;
$a_{10} = 100$, $a_{20} = 400$, $a_{40} = 1600$, $a_{100} = 10\,000$, $a_n = n^2$.

**127.** a) $-1, -2, -3, -4, -5$; b) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}$;
c) $-3, -3, -3, -3, -3$; d) $-2, 4, -8, 16, -32$;
e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$; f) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$.

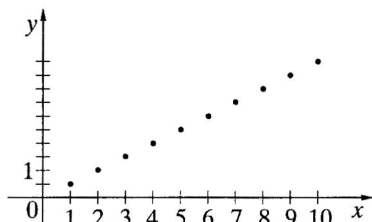
**128.** a) $a_1 = -1$, $a_5 = 15$, $a_{10} = 35$, $a_{n+1} = 4n - 1$;
b) $a_1 = 1\frac{1}{5}$, $a_5 = 2$, $a_{10} = 3$, $a_{n+1} = \frac{n+6}{5}$;
c) $a_1 = -3$, $a_5 = 21$, $a_{10} = 96$, $a_{n+1} = n^2 + 2n - 3$;
d) $a_1 = 5$, $a_5 = -7$, $a_{10} = -22$, $a_{n+1} = -3n + 5$.

**129.** a) 10; b) 25; c) 101; d) 500.

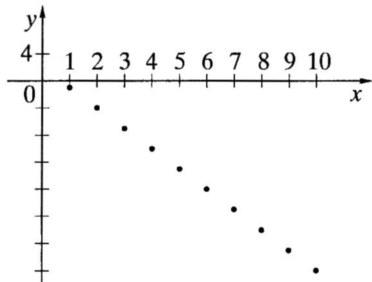
**130.** a) $1, -3, -7, -11, -15$; b) $10, 2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \frac{2}{125}$;
c) $10, -5, -2, 2\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}$; d) $10, -5, -\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{5}$.

**131.** a) $a_n = 10^{n-1}$;
b) sekos 1, −4, 9, −16, ... bendrojo nario formulė yra $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2$;
c) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 4$; d) $a_n = \frac{n}{n+1}$.

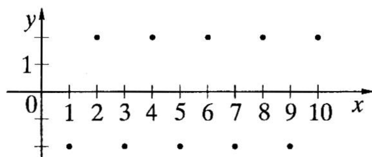
**132.** a) $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5;




b) −1, −4, −7, −10, −13, −16, −19, −22, −25, −28;




c) −2, 2, −2, 2, −2, 2, −2, 2, −2, 2;




d) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{243}$, $\frac{1}{729}$. *Pastaba.* Šio punkto duomenų galite koordinačių plokštumoje nevaizduoti.

**133.** a) $a_2 = 50$, $a_3 = 25$, $a_4 = 12{,}5$, $a_5 = 6{,}25$;
b) $a_2 = -17$, $a_3 = -14$, $a_4 = -11$, $a_5 = -8$.

**134.** $a_n = 3n - 1$; $a_1 = 2$, $a_{10} = 29$, $a_{15} = 44$. Šios sekos nariai yra: 254; 500.

**135.** $y_n < 20$, kai $n = 1, 2, 3, 4$; $x_n < -20$, kai $n = 4, 5, \ldots$

**136.** a) $n = 2, 3, 4, 5$; b) $n = 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

## 17.2. Didėjančios ir mažėjančios skaičių sekos

Pagrindinė šio skyrelio naujovė — sekos ribos vaizdinys. Tačiau pradedama nuo didėjančių bei mažėjančių funkcijų. Pabrėžkime, kad geras būdas tyrinėti ar seka $(a_n)$ yra monotoninė — apskaičiuoti skirtumą $a_{n+1} - a_n$ ir nagrinėti, ar skirtumo ženklas yra pastovus. Kai sekos nariai yra pastovaus ženklo, vietoj skirtumo galima nagrinėti santykį $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Koks turi būti šis santykis, kad teigiamų narių seka būtų didėjanti, koks — kad būtų mažėjanti?

Prie ribos sąvokos prieiname nagrinėdami didėjančią seką $b_n = 1 - \frac{1}{n}$. Nei vienas sekos narys „neperžengia" skaičiaus 1. Pasiūlykite įsivaizduoti, kaip šios sekos nariai yra „susirikiavę" į eilę, kuo arčiau vieneto, tuo tankiau, tačiau vieneto „slenksčio" neperžengia. Galima pasakyti, kad sekos nariai tiesiog kaupiasi ties tuo „slenksčiu", t. y. ties vienetu. Jeigu į kairę nuo vieneto, tarkime, $10^{-7}$ atstumu įrengtume „užtvarėlę", kiek sekos narių liktų už jos? O jeigu „užtvarėlę" dar priartintume? Kiekvienu atveju „nepriimtųjų" į šitaip apribotą vieneto aplinką būtų baigtinis skaičius, o į ją patektų be galo daug narių.

Nagrinėdami sekas $d_n = 1 + \frac{1}{n}$, $e_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ parodykime, kad sekos nariai ties vienetu gali „kauptis" ir kitaip. Taigi vienetas yra šios sekos riba. Pasiūlykite, apibrėžti sekas, kurios turėtų kitokias ribas. Žinoma, paprasčiausias būdas pakeisti nagrinėtųjų sekų bendrųjų narių formulėse vienetą kitu skaičiumi.

Intuityviai aiškią sekos ribos sąvoką neformaliai galima nusakyti taip: skaičius $a$ yra sekos $(a_n)$ riba, jeigu kad ir kokį mažą „kiemą" aptvertume apie skaičių $a$ (kad ir kokį mažą intervalą $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ paimtume), kieme tilptų visi šios sekos nariai, išskyrus baigtinį skaičių pirmųjų. Įrėmintas ribos apibrėžimas tik tą ir tereiškia. Nereikėtų reikalauti išmokti jį atkartoti. Geriau paprašykime nusakyti ribos sąvoką savais žodžiais. Ar ribos vaizdinys tikrai teisingas galima pabandyti patikrinti, pavyzdžiui, pateikiant klausimus: jeigu sekos $(a_n)$ riba lygi $a$, ar gali būti sekos narių lygių $a$? besiskiriančių nuo skaičiaus $a$, tarkime, milijonu? be galo daug narių, besiskiriančių nuo $a$ skaičiumi $\frac{1}{10^6}$ ir t. t.

***Suvokiame ir žinome:***

ribos sąvoką;

kaip gali elgtis seka arti savo ribos.

***Mokame:***

tirti, ar seka yra monotoninė;

samprotaujant, kaip kinta sekos bendrojo nario formulės reiškiniai, paprastais atvejais pasakyti, kokia yra sekos riba.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pratimų ir uždavinių po šio skyrelio medžiagos nėra. Manyta, kad sekos didėjimo ir mažėjimo bei ribos įvaizdžiams susidaryti pakaks skyrelyje pateiktų pavyzdžių ir užduočių. Šias keturias užduotis siūlytume kartu su moksleiviais išnagrinėti.

## 17.3. Aritmetinė progresija

Aritmetinė progresija — paprasčiausia rekurentiškai apibrėžiama seka. Pasiūlykite nustatyti, su kuriomis skirtumo $d$ reikšmėmis progresija yra didėjanti, su kuriomis — mažėjanti.

Prieš įrodant bendrojo nario formulę pasiūlykite nustatyti, kokia ji yra. Apskaičiavus kelis pirmuosius narius (išreiškus juos pirmuoju nariu ir skirtumu), hipotezę apie bendrojo nario formulę nebus sunku suformuluoti.

Moksleiviams, mokantiems naudotis matematine indukcija, galima pasiūlyti įrodyti formulę šiuo metodu.

Pirmųjų progresijos narių sumos formulės dėstymas vadovėlyje pradedamas nuo pavyzdžio. Verta jį panagrinėti. Paprastos aritmetinės progresijos $n$ pirmųjų narių formulė įrodoma „geometriškai". Šis įrodymas iliustruoja bendrosios formulės įrodymo idėją. Galima tai pabrėžti, kad algebrinis įrodymas būtų suvokiamas ne taip formaliai: narių grupavimas atitinka eilučių sujungimą sugretinant du trikampius.

Skyrelis baigiamas pavyzdžiais, kuriuose nurodyta formulė $n$ pirmųjų narių sumai skaičiuoti ir reikalaujama surasti pirmąjį aritmetinės progresijos narį bei skirtumą.

Galima panagrinėti bendresnį klausimą: kokiomis argumento $n$ funkcijomis gali būti reiškiamos aritmetinių progresijų $n$ pirmųjų narių suma? Nesunku nustatyti, kad tokios funkcijos turi būti kvadratinės su nuliniu laisvuoju nariu, t. y. funkcijos

$$f(n) = an^2 + bn = (an + b)n.$$

Iš tikrųjų,

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 - d}{2} \cdot n + \frac{d}{2} \cdot n^2.$$

Ar kiekviena tokia funkcija reiškia aritmetinės progresijos $n$ pirmųjų narių sumą? Pertvarkykime funkciją taip:

$$f(n) = \frac{2b + 2an}{2} \cdot n = \frac{2(a+b) + 2a(n-1)}{2} \cdot n.$$

Imdami aritmetinę progresiją su $a_1 = a + b, d = 2a$, gauname $S_n = f(n)$.

Galima paminėti ir daugiau įdomių aritmetinės progresijos savybių. Pavyzdžiui, pridėjus prie visų aritmetinės progresijos narių po tą patį skaičių, vėl gaunama aritmetinė progresija; imant kas antrą (kas trečią ir pan.) aritmetinės progresijos narį, vėl gaunama nauja aritmetinė progresija.

***Suvokiame ir žinome:***

aritmetinės progresijos apibrėžimą;

aritmetinės progresijos bendrojo nario formulę;

aritmetinės progresijos $n$ pirmųjų narių sumos formulę.

***Mokame*** taikyti bendrojo nario ir aritmetinės progresijos narių sumos formulę uždaviniams apie aritmetines progresijas spręsti.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pirmoji uždavinių grupė (137–144) skirta išmokyti naudotis sekos bendrojo nario formule. Sprendžiant antrosios grupės uždavinius (145–150) tenka pasinaudoti aritmetinės progresijos narių sumos formule. Iš kiekvienos grupės reikėtų atsirinkti ir išspręsti po keletą pratimų. Be to — verta pasilikti laiko trečiosios grupės (151–157) — sąlyginiams aritmetinės progresijos uždaviniams. Juk jie tiesiog patrauklesni.

**137.** Aritmetinės progresijos yra: a), c), e), f).

**138.** a) 5; 8; 11; 14; 17; b) 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; c) $\frac{1}{4}$; $4\frac{1}{4}$; $8\frac{1}{4}$; $12\frac{1}{4}$; $16\frac{1}{4}$;
d) 100; 0; −100; −200; −300.

**139.** a) $b_5 = b_1 + 4d$; b) $b_{20} = b_1 + 19d$; c) $b_n = b_1 + d(n-1)$;
d) $b_{n+3} = b_1 + d(n+2)$; e) $b_{2n} = b_1 + d(2n-1)$; f) $b_{2n+4} = b_1 + d(2n+3)$.

**140.** a) 36; b) 190,1; c) −116; d) $3\frac{2}{5}$.

**141.** a) $a_5 = -13$, $a_{10} = -38$, $a_n = 12 - 5n$;
b) $a_5 = 3\frac{1}{4}$, $a_{10} = 7$, $a_n = \frac{3}{4}n - \frac{1}{2}$;
c) $a_5 = 70$, $a_{10} = 170$, $a_n = 20n - 30$;
d) $a_5 = -24{,}5$, $a_{10} = -59{,}5$, $a_n = 10{,}5 - 7n$.

**142.** a) $d = -8$, $a_n = 4 - 8(n-1) = 4 - 8n + 8 = 12 - 8n$;
b) $d = -5$, $a_n = 10 - 5n$;
c) $d = 2$, $a_n = 2n - 9$;
d) $\begin{cases} a_1 + 9d = 0, \\ a_1 + 39d = -30; \end{cases}$ $a_1 = 9$, $d = -1$; $a_n = 10 - n$.

**143.** a) Sprendžiame sistemą:
$\begin{cases} a_1 + 3d = 8{,}5, \\ a_1 + 9d = 20{,}5; \end{cases}$ $d = 2$, $a_1 = 2{,}5$.
Tada $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot n = \frac{2{,}5 + 20{,}5}{2} \cdot 10 = 115$.

b) Sprendžiame sistemą:
$\begin{cases} a_1 + 5d = -3, \\ a_1 + 15d = -49{,}2; \end{cases}$ $d = -4{,}62$, $a_1 = 20{,}1$, $a_{10} = -21{,}48$.
Tada $S_{10} = \frac{20{,}1-21{,}48}{2} \cdot 10 = -6{,}9$.

**144.** a) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 \cdot a_5 = -36; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d = 0, \\ a_1 \cdot (a_1 + 4d) = -36; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = -2d, \\ -2d(-2d + 4d) = -36; \end{cases}$
$d^2 = 9$, $d = 3$ ir $d = -3$. Kai $d = 3$, tai $a_1 = -6$; kai $d = -3$, tai $a_1 = 6$;
b) $\begin{cases} a_3 + a_6 = 38, \\ a_1 \cdot a_4 = 85; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 5d = 38, \\ a_1 \cdot (a_1 + 3d) = 85; \end{cases}$ $\begin{cases} 2a_1 + 7d = 38, \\ a_1 \cdot (a_1 + 3d) = 85; \end{cases}$
$d = \frac{38-2a_1}{7}$; $a_1\left(a_1 + \frac{3\cdot(38-2a_1)}{7}\right) = 85$, $a_1^2 + 114a - 595 = 0$, $a_1 = 5$ ir $a_1 = -119$. Kai $a_1 = 5$, tai $d = 4$; kai $a_1 = -119$, tai $d = 39\frac{3}{7}$.

**145.**

| $a_1$ | $d$ | $n$ | $a_n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | −3 | 20 | −53 | −490 |
| 6 | 6 | 10 | 60 | 330 |
| −7 | 1 | 8 | 0 | −28 |
| 10 | 0,5 | 101 | 60 | 3535 |
| $-\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 14 | 5 | 33,6 |

**146.** a) $2+4+6+\dots+2x = 72$ — kairėje lygybės pusėje yra aritmetinės progresijos su $a_1 = 2$ ir $d = 2$ narių suma. Taigi $72 = \frac{2\cdot2+2(x-1)}{2} \cdot x$, $x^2 + x - 72 = 0$, $x = 8$ ir $x = -9$ (netinka). Lieka $x = 8$.
b) 9; c) 55.
d) Kairėje lygybės $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155$ pusėje — aritmetinės progresijos, kurios $a_1 = x + 1$, $d = 3$, narių suma. Tada $x + 28 = x + 1 + 3(n - 1)$, $n = 10$. Pritaikę aritmetinės progresijos pirmųjų $n$ narių sumos formulę, gauname:
$155 = \frac{(x+1)+(x+28)}{2} \cdot 10$, $x = 1$.
e) $2^{1+3+5+\dots+(2x-1)} = 2^{25}$. Sulyginę laipsnių rodiklius, gauname:
$1 + 3 + 5 + \dots + (2x - 1) = 25$, $25 = \frac{2+2(x-1)}{2} \cdot x$, $x = 5$ ir $x = -5$ (netinka). Lieka $x = 5$.
f) $\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 + \dots + \lg x^{100} = 5050$. Pritaikę logaritmų savybę, gauname: $\lg x + 2\lg x + 3\lg x + \dots + 100\lg x = 5050$. Tada $(1 + 2 + 3 + \dots + 100)\lg x = 5050$, $\frac{1+100}{2} \cdot 100 \cdot \lg x = 5050$, $\lg x = 1$, $x = 10$.

**147.** Kadangi $a_1 = 7$, $d = -2$, $S_n = 12$, tai $12 = \frac{2\cdot7-2(n-1)}{2} \cdot n$, vadinasi, $n = 2$ arba $n = 6$.
*Nurodymas.* Galima paprašyti išvardyti progresijos narius. Tai bus 7 ir 5 arba $7, 5, 3, 1, -1$ ir $-3$.

**148.** a) $S_{40} = -3740$. Ši seka turi 1 teigiamą narį.
b) $S_{30} = 795$. Ši seka turi 6 neigiamus narius.

**149.** $a_{n+1} - a_n = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1} =$
$(n + 1)^2 - 5(n + 1) - 2n^2 + 10n + (n - 1)^2 - 5(n - 1) = 2$.
Kadangi dviejų iš eilės einančių sekos narių skirtumas yra pastovus, tai seka yra aritmetinė progresija.
$d = 2$, $a_1 = S_1 = 1 - 5 \cdot 1 = -4$, $a_n = -4 + 2(n - 1) = 2n - 6$.
*Atsakymas.* a) $a_n = 2n - 6$; b) $a_n = 7 - 2n$.

**150.** a) $a_3+a_5+a_6+a_8 = 2$, $a_1+2d+a_1+4d+a_1+5d+a_1+7d = 2$, $4a_1+18d = 2$, $2a_1 + 9d = 1$. Kadangi $S_{10} = \frac{2a_1+9d}{2} \cdot 10$, tai $S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.
b) $a_6 + a_9 + a_{12} - a_{16} = 20$, $a_1 + 5d + a_1 + 8d + a_1 + 11d - a_1 - 15d = 20$, $2a_1 + 9d = 20$. Tada $S_{10} = 100$.

**151.** $\triangle A_1OB_1 \backsim \triangle A_2OB_2$. Tada $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{OA_2}{OA_1} = 2$, $A_2B_2 = 2 \cdot A_1B_1 = 4\,(\text{cm})$.
Analogiškai $\triangle A_3OB_3 \backsim \triangle A_1OB_1$, $A_3B_3 = 3 \cdot 2 = 6\,(\text{cm})$ ir t. t.
$A_5 \cdot B_5 = 10\,(\text{cm})$, $A_{13} \cdot B_{13} = 26\,(\text{cm})$.

**152.** Trikampio statinių ilgiai yra $35 - d$ ir $35 - 2d$. Pagal Pitagoro teoremą $(35 - d)^2 + (35 - 2d)^2 = 35^2$. Tada $-70d + d^2 + 35^2 - 140d + 4d^2 = 0$, $d^2 - 42d + 7 \cdot 35 = 0$. Remiantis Vijeto teorema, $d_1 = 35$ ir $d_2 = 7$. Pirmas sprendinys netinka (statinis $35 - 2d$ neigiamas), o antras tinka, ir statiniai lygūs 28 ir 21.
*Atsakymas.* 21, 28, 35.

**153.** Tarkime, kad į 5000 m aukščio kalno viršūnę alpinistas kopė $n$ dienų. Tada $5000 = \frac{2 \cdot 800 - 50(n-1)}{2} \cdot n$, $n^2 - 33n + 200 = 0$, $n = 25$ ir $n = 8$. Reikia patikrinti abi $n$ reikšmes. Taigi jei alpinistas būtų kopęs 25 dienas, tai 25 dieną jis užkopė $a_{25} = 800 - 50 \cdot 24 = -400$ (m). Vadinasi, ši reikšmė netinka. Jei alpinistas kopė 8 dienas, tai 8-ą dieną jis užkopė $800 - 50 \cdot 7 = 450$(m), o per 8 dienas — $\frac{800+450}{2} \cdot 8 = 5000$ (m).
*Atsakymas.* Po 8 dienų.
*Pastaba.* Šis uždavinys rodo, kad apskritai šnekant, tikrinti sprendinius reiškia ne tik tikrinti, ar jie tinka lygčiai, bet ir tikrinti sąlygą (t. y. kiekvieną sąlygos žodį — šiuo atveju, kiek gi alpinistas užlipdavo kiekvieną dieną).

**154.** 9150 m, 3975 m.

**155.** Per 10 minučių ištekės $5 \cdot 10 = 50$ litrų vandens, taigi liks $3000 - 50 = 2950$ litrų. Per pusvalandį ištekės $5 \cdot 30 = 150$ litrų vandens, taigi liks $3000 - 150 = 2850$ litrų. Visas vanduo ištekės per $3000 : 5 = 600$ minučių.
*Atsakymas.* 2950 $\ell$, 2850 $\ell$, 10 h.

**156.** Skaičiai 10, 13, 16, ... sudaro aritmetinę progresiją, kurios $a_1 = 10$ ir $d = 3$. Sumokėta suma lygi šių narių sumai.
*Atsakymas.* $S_3 = 39$ (Lt), $S_5 = 80$ (Lt).

**157.** Eilėse esančių kėdžių skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios $d = 5$. Kadangi eilių yra 20, o paskutinėje eilėje yra 120 vietų, tai $a_{20} = 120$. Tada $120 = a_1 + 5 \cdot 19$, todėl $a_1 = 25$, o $S_{20} = 1450$.
*Atsakymas.* Salėje gali sėdėti 1450 žmonių.

## 17.4. Geometrinė progresija

Geometrinė progresija — kitas paprasčiausios rekurentine lygybe apibrėžiamos sekos pavyzdys. Lyginant ją su aritmetine progresija, galima pabrėžti tiek rekurentinių formulių, tiek ir bendrojo nario formulių panašumą — jų struktūra ta pati, tik veiksmai skirtingi.

Kaip ir aritmetinės progresijos atveju, bendrojo nario formulę iš pradžių verta „įspėti", o po to formaliai įrodyti. Įrodoma analogiškai, kaip ir aritmetinės progresijos bendrojo nario formulė, tik prastinami ne vienodi dėmenys, bet vienodi daugikliai.

Pirmųjų $n$ geometrinės progresijos narių sumos formulė įrodinėjama dauginant lygybę

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

iš $q$ ir remiantis geometrinės progresijos apibrėžimu. Tą pačią idėją galima panaudoti ir šiek tiek kitaip:

$$S_n + b_{n+1} = S_{n+1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1}$$
$$= b_1 + q(b_1 + \cdots + b_n) = b_1 + qS_n.$$

Iš šios lygybės taip pat galima rasti $S_n$.

***Suvokiame ir žinome:***
geometrinės progresijos apibrėžimą;
geometrinės progresijos bendrojo nario formulę;
geometrinės progresijos pirmųjų narių sumos formulę.

***Mokame*** taikyti geometrinės progresijos apibrėžimą, bendrojo nario ir pirmųjų narių sumos formules sprendžiant uždavinius.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pirmasis skyrelio uždavinys skirtas geometrinės progresijos požymiui pakartoti: seka yra geometrinė progresija, jei jos dviejų iš eilės einančių narių santykis pastovus. Šį uždavinį verta visiems išnagrinėti. Iš 159–165 pratimų reikia atsirinkti bendrojo nario formulės taikymo užduotis.
Geometrinės progresijos narių sumos formulė taikoma sprendžiant 166–168 uždavinius. Visi turėtų išspręsti 166 ir 167 uždavinius. Sprendžiant 167 uždavinį svarbu neapsirikti skaičiuojant, kiek progresijos narių sumuojama.

**158.** Geometrinės progresijos yra: a), b), c) ir f).

**159.** a) 6; 3; 1,5; 0,75; 0,375; b) $\frac{1}{2}$; 3; 18; 108; 648;
c) −100; 10; −1; 0,1; −0,01; d) 0,5; −2; 8; −32; 128.

**160.** a) $y_4 = y_1 \cdot q^3$; b) $y_{20} = y_1 \cdot q^{19}$; c) $y_n = y_1 \cdot q^{n-1}$;
d) $y_{n+5} = y_1 \cdot q^{n+4}$; e) $y_{2n} = y_1 \cdot q^{2n-1}$; f) $y_{2n+3} = y_1 \cdot q^{2n+2}$.

**161.** a) 810; b) 1296; c) $-\frac{64}{15\,625} = 0{,}004096$;
d) $-2 \cdot 0{,}1^7 = -2 \cdot 10^{-7} = -0{,}000\,000\,2$.

**162.** a) $b_5 = 16$, $b_{10} = 512$, $b_n = 2^{n-1}$;
b) $b_5 = 2187$, $b_{10} = -3^{17}$, $b_n = \frac{1}{3} \cdot (-9)^{n-1} = -\frac{(-9)^n}{27}$;
c) $b_5 = -\frac{16}{7}$, $b_{10} = -\frac{512}{7}$, $b_n = -\frac{2^n}{14}$;
d) $b_5 = 64$, $b_{10} = -65\,536$, $b_n = \frac{1}{4} \cdot 4^{n-1} = \frac{4^n}{16} = 4^{n-2}$.

**163.** a) $q = -\frac{1}{2}$, $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{-16}{(-2)^n}$.
b) $q = \frac{1}{5}$, $b_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 25 \cdot \frac{1}{5^n} = 5^{2-n}$.
c) $q = 1$, $b_n = 4$.
d) Pagal sąlygą sudarome sistemą:
$$\begin{cases} b_2 = 100, \\ b_6 = 10^{-20}; \end{cases} \begin{cases} b_1 q = 10^2, \\ b_1 q^5 = 10^{-20}. \end{cases}$$
Iš čia $q^4 = 10^{-22}$, $q_1 = 10^{-\frac{11}{2}}$ ir $q_2 = -10^{-\frac{11}{2}}$.
Jei $q = 10^{-\frac{11}{2}}$, tai $b_1 = \frac{10^2}{q} = 10^{\frac{15}{2}}$,
$b_n = 10^{\frac{15}{2}}\left(10^{-\frac{11}{2}}\right)^{n-1} = 10^{\frac{26-11n}{2}} = 10^{13-6n}\sqrt{10^n}$;
jei $q = -10^{-\frac{11}{2}}$, tai $b_1 = -10^{\frac{15}{2}}$,
$b_n = -10^{\frac{15}{2}}\left(-10^{-\frac{11}{2}}\right)^{n-1} = (-1)^n 10^{\frac{26-11n}{2}} = (-1)^n 10^{13-6n}\sqrt{10^n}$.
e) $q = \frac{1}{2}$, $b_n = \sin\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\sin\alpha}{2^{n-1}}$.
f) Kai $b_3 = -54$, $b_6 = 162$, tai sprendžiame sistemą:
$\begin{cases} b_1 \cdot q^2 = -54, \\ b_1 \cdot q^5 = 162. \end{cases}$ Iš čia $q^3 = -3$, $q = -\sqrt[3]{3}$.
Tada $b_1 = \frac{-54}{(-\sqrt[3]{3})^2} = -\frac{54 \cdot \sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{3})^2 \cdot \sqrt[3]{3}} = -18\sqrt[3]{3}$; $b_n = 18 \cdot \left(-\sqrt[3]{3}\right)^n$.

**164.** a) $b_7 = b_4 \cdot q^3$, $-128 = 16 \cdot q^3$, $q^3 = -8$, $q = -2$. Tada $b_1 = -2$ ir $S_6 = 42$.
b) $q = 4$, $b_1 = \frac{1}{4}$, $S_6 = 341{,}25$.

**165.** a) $b_1 = 2\frac{5}{11}$, $q = 2\frac{2}{3}$;

b) $\begin{cases} b_2 - b_1 = -4, \\ b_3 - b_1 = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1q - b_1 = -4, \\ b_1q^2 - b_1 = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1(q-1) = -4, \\ b_1(q^2-1) = 8; \end{cases}$

$\begin{cases} b_1(q-1) = -4, \\ b_1(q-1)(q+1) = 8. \end{cases}$ Iš čia $q+1=-2$, $q=-3$, $b_1 = 1$;

c) $\begin{cases} b_4 + b_1 = \frac{7}{16}, \\ b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1q^3 + b_1 = \frac{7}{16}, \\ b_1q^2 - b_1q + b_1 = \frac{7}{8}; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1(q^3+1) = \frac{7}{16}, \\ b_1(q^2 - q + 1) = \frac{7}{8}; \end{cases}$

$\frac{q^3+1}{q^2-q+1} = \frac{1}{2}$, $q + 1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$.

**166.**

| $b_1$ | $q$ | $n$ | $b_n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 5 | 48 | 93 |
| $128\frac{128}{1023}$ | 0,5 | 10 | $\frac{256}{1023}$ | 256 |
| $-\frac{1}{2}$ | $-10$ | 6 | 50 000 | 45454,5 |
| $\frac{121}{1093}$ | 3 | 7. | $80\frac{769}{1093}$ | 121 |
| 0,25 | $-4$ | 8 | $-4096$ | $-3276,75$ |

**167.** a) 63. b) $-682$.

c) Tai geometrinės progresijos, kurios $b_1 = 1$, $q = x$ pirmųjų 51 narių suma: $S_{51} = \frac{1 - x \cdot x^{50}}{1-x} = \frac{1-x^{51}}{1-x}$.

d) $S_{11} = \frac{x + x^{23}}{1 + x^2}$.

**168.** a) $1 + x + x^2 + \dots + x^{99} = 0$ — kairėje geometrinės progresijos, kurios $b_1 = 1$, $q = x$, $b_n = x^{99}$, narių suma. Vadinasi, $0 = \frac{1 - x \cdot x^{99}}{1-x}$, $1 - x^{100} = 0$, $x^{100} = 1$, $x = 1$ ir $x = -1$. Reikšmė $x = 1$ netinka.

b) $x + x^2 + \dots + x^{12} = 0$ — kairėje geometrinės progresijos, kurios $b_1 = x$, $q = x$, $b_n = x^{12}$, narių suma. Vadinasi, $\frac{x - x \cdot x^{12}}{1-x} = 0$, $x(1 - x^{12}) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Reikšmė $x = 1$ netinka.

c) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^x = -21$ — kairėje geometrinės progresijos, kurios $b_1 = 1$, $q = -2$, $b_n = 2^x$, narių suma. Vadinasi, $-21 = \frac{1 + 2 \cdot 2^x}{1+2}$, $-64 = 2 \cdot 2^x$, $2^x = -32$. Ši lygtis sprendinių neturi. Vadinasi, tokios $x$ reikšmės nėra.

*Pastaba.* Vieno žvilgsnio užtenka pamatyti, kad duotoji lygtis sprendinių neturi: lygybė $1 + (-2 + 2^2) + (-2^3 + 2^4) + \dots + (-2^{x-1} + 2^x) = -21$ negalima, nes kairės pusės visi dėmenys teigiami, o dešinė — neigiama. Jeigu spręstume lygtį $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots - 2^x = -21$ panašiai kaip aukščiau, gautume $x = 5$. Ir net patikrinę įsitikintume, kad $x = 5$ „tinka“: $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^5 = -21$.

O dabar panašiai spręskime lygtį $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^x = \frac{65}{3}$. Gauname $\frac{1 + 2 \cdot 2^x}{1+2} = \frac{65}{3}$, $2^x = 32$, $x = 5$. Liko patikrinti, kam gi lygus reiškinys $1 - 2 + 2^2 - \dots + 2^5$. Štai dabar ir paaiškėja, kur čia dalyko esmė: mes nesuprantame, ką reikia suskaičiuoti. Panašiai pasimestume, pamatę sumą $3 + 5 + 7 + \dots + 100$. Pasakytume — nesąmonė. Bet $3 + 5 + \dots + x$ — tai jau jokia nesąmonė.

Pasirodo, geriausia iš pat karto kalbėti apie apibrėžimo sritį. Reiškinio apibrėžimo sritis — tai tos $x$ reikšmės, su kuriomis reiškinys turi prasmę (paprasčiau — kai mes suprantame, ko iš mūsų norima). Tai štai ir reiškinio $3 + 5 + \dots + x$ apibrėžimo sritis — didesni už vienetą nelyginiai natūralieji skaičiai (tada suprantame, kas čia parašyta), o visi kiti skaičiai neįeina į apibrėžimo sritį — juk nesuprantame, ką turėtų reikšti užrašai $3 + 5 + \dots + \frac{21}{2}$, $3 + 5 + \dots + (-9)$, $3 + 5 + \dots + 0$ ir net užrašas $3 + 5 + \dots + 1$.

Tad grįžkime prie duotosios lygties. Suprantame, kas kairėje parašyta, tik tada, kai $x$ — natūralusis lyginis skaičius. Vadinasi, apibrėžimo sritis yra $\{2k | k \in N\}$. Beje, nieko bloga neatsitiktų ir sakant, kad užrašą suprantame ir kai $x = 0$, o apibrėžimo sritis yra $\{2k - 2 | k \in N\}$. Todėl net jei spręsdami ir rastume realiųjų $x$ reikšmių, iš jų tiktų tik įeinančios į apibrėžimo sritį.

Dar kartą išspręskime lygtį $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^x = \frac{65}{3}$. Kadangi jos (= kairės pusės) apibrėžimo sritis lyginiai natūralieji skaičiai, tai kairėje su bet kuriuo $x$ bus sveikasis skaičius, o dešinėje — ne. Vadinasi, sprendinių nėra.

d) $1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{11}{16}$ — kairėje geometrinės progresijos, kurios $b_1=1$, $q=-\frac{1}{2}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, narių suma. Vadinasi, $\frac{11}{16}=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1+\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$, $x+1=5$, $x=4$.

e) $1+\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^9 x=0$ — kairėje geometrinės progresijos, kurios $b_1=1$, $q=\sin x$, $b_n=\sin^9 x$, narių suma. Vadinasi, $\frac{1-\sin x\cdot\sin^9 x}{1-\sin x}=0$, $1-\sin^{10} x=0$, $\sin^{10} x=1$, $\sin x=-1$ ($\sin x=1$ netinka), $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

f) $\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{10} x=0$ — kairėje geometrinės progresijos, kurios $b_1=\cos x$, $q=\cos x$, $b_n=\cos^{10} x$, narių suma. Vadinasi, $\frac{\cos x-\cos x\cdot\cos^{10} x}{1-\cos x}=0$, $\cos x(1-\cos^{10} x)=0$, $\cos x=0$ arba $\cos^{10} x=1$, t. y. $\cos x=-1$, $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

*Atsakymas.* a) $-1$; b) $-1$; $0$; c) tokios $x$ reikšmės nėra; d) 4; e) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; f) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pi+2\pi k$, $k\in Z$.

**169.** a) Tarp skaičių 2 ir 156 įrašykime keturis skaičius: 2, $b_2$, $b_3$, $b_4$, $b_5$, 156. Šie skaičiai sudaro geometrinę progresiją, kurios $b_1=2$ ir $b_6=156$. Tada $q=\sqrt[5]{78}$, $b_2=2\sqrt[5]{78}$, $b_3=2\sqrt[5]{78^2}$, $b_4=2\sqrt[5]{78^3}$, $b_5=2\sqrt[5]{78^4}$;

b) $3\sqrt[5]{24}$, $-3\sqrt[5]{24^2}$, $3\sqrt[5]{24^3}$, $-3\sqrt[5]{24^4}$;

c) $10^{3,2}$, $10^{2,4}$, $10^{1,6}$, $10^{0,8}$;

d) $-\frac{1}{5}\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[5]{5^2}$, $-5\sqrt[5]{5^3}$, $25\sqrt[5]{5^4}$, $-625$.

## 17.5. Nykstamoji geometrinė progresija

Jeigu seka turi ribą, tai nariai prie tos ribos gali artėti trejopai: didėdami, mažėdami arba „šokinėdami" — tai „užbėga" į priekį, tai „sugrįžta" atgal. Įsitikinkime, kad nykstamoji geometrinė progresija „nykti" irgi gali panašiai: mažėdama, didėdama ir „svyruodama" apie nulį tarsi kokia svyruoklė.

Įdomi ir svarbi geometrinės progresijos savybė — jeigu ji nyksta, tai jos pirmųjų $n$ narių sumos „kaupiasi" ties tam tikru skaičiumi $S$, t. y. turi ribą. Sakoma, kad šis skaičius yra geometrinės progresijos narių suma. Nykstamosios geometrinės progresijos narių sumos formulė išvedama pertvarkius $n$ pirmųjų narių sumos formulę ir remiantis intuityvia ribos samprata.

Kad vis didėjančio sekos narių skaičiaus suma netampa labai didelė, iš pradžių gali pasirodyti kiek keista, tačiau tik iš pradžių. Galima nesunkiai įsitikinti, kad ir patys sugebėtume sugalvoti daug tokių pavyzdžių. Iš tikrųjų, prisiminkime, pavyzdžiui, ankstesniame skyrelyje nagrinėtą seką $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Galima atidėti kelis jos narius skaičių tiesėje. Akivaizdu, kad

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Taigi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \cdots = 1,$$

t. y. nykstamosios sekos $b_n = \frac{1}{(n-1) \cdot n}$ suma lygi vienetui. Gal kiekvienos nykstamosios sekos narių suma yra apibrėžta, t. y. $n$ pirmųjų narių sumos artėja prie tam tikros ribos?

Panagrinėkime tokį pavyzdį. Imkime seką $a_n = \sqrt{n}$ ir sumuokime panašiai kaip anksčiau:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n,$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{n},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Taigi nykstamosios sekos $b_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$ narių suma nėra apibrėžta.

Skyrelis baigiamas nykstamųjų geometrinių progresijų sąvokos taikymu begalinėms periodinėms dešimtainėms trupmenoms nagrinėti. Siekdami išreikšti iracionalųjį skaičių dešimtaine trupmena, artinome jį skaičiais, reiškiamais baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis. Taigi gautosios begalinės neperiodinės dešimtainės trupmenos skaitmenys turėjo tam tikrą geometrinę prasmę. Kita vertus, begalines periodines dešimtaines trupmenas gaudavome iš formalios dalybos. Dabar, remdamiesi geometrine progresija, ir begalinėms periodinėms dešimtainėms trupmenoms suteikiame analogišką prasmę: begalinė dešimtainė periodinė trupmena taip pat yra tam tikro artėjimo proceso „kodas".

***Suvokiame ir žinome:***

nykstamosios geometrinės progresijos ir jos narių sumos sąvokas;

nykstamosios geometrinės progresijos narių sumos formulę;

nykstamosios geometrinės progresijos ir begalinių periodinių dešimtainių trupmenų ryšį.

***Mokame*** taikyti nykstamosios geometrinės progresijos sumos formulę paprastiems uždaviniams spręsti.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Nykstamosios geometrinės progresijos sumai skirti tik keli uždaviniai. Svarbiausi jų yra 170 ir 171. Uždavinys apie begalines periodines dešimtaines trupmenas (173) svarbus intuityviam realiųjų skaičių aibės struktūros vaizdiniui susidaryti: nuo minties, kad racionalieji skaičiai (t. y. skaičiai reiškiami begalinėmis periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis) yra tam tikrų sekų ribos visai netoli iki minties, kad iracionalieji skaičiai irgi gali būti panašiai interpretuojami.

**170.** a) $\frac{1}{2}$; b) $-1$; c) $\frac{5}{8}$; d) $\frac{2}{9}$.

**171.** a) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$; b) $5\frac{1}{7}$; c) $\frac{1}{9}$; d) $-\frac{5}{6}$.

**172.** a) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$.

Sprendžiame lygtį: $\frac{5}{4} = 16^{-x} \cdot 25^x$, $\frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2x}$, $x = \frac{1}{2}$.

b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Sprendžiame lygtį: $\frac{3}{2} = 27^x \cdot 8^{-x}$, $\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3x}$, $x = \frac{1}{3}$.

c) $x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[9]{x} \cdot \ldots = 3^{1,5}$, $x^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots} = 3^{1,5}$.

Kadangi $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, tai $x^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$, $x = 3$.

d) $x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x} \cdots = 16$, $x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = 16$.

Kadangi $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, tai $x^2 = 16$. Sąlygą tenkina tik reikšmė $x = 4$.

**173.** a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{1}{9}$; c) $6\frac{25}{99}$; d) $10\frac{125}{999}$.

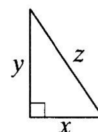
**174.** a) $1\frac{1}{9}$; b) $-\frac{10}{99}$; c) $\frac{8}{27}$; d) $1\frac{9}{44}$.

**175.** a) Geometrinė progresija; b) aritmetinė progresija;
c) seka yra ir aritmetinė, ir geometrinė progresija; d) geometrinė progresija.

**176.** Tegu $a_n$ — aritmetinė progresija, kurios skirtumas lygus $d$.
Tada $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 3$, $3a_1 + 3d = 3$,
$a_1 + d = 1$. Taigi $a_2 = 1$, $a_1 = 1 - d$, $a_3 = 1 + d$.
$(a_1 + 1)$, $(a_2 + 7)$, $(a_3 + 17)$ — geometrinė progresija. Raskime jos narius:
$b_1 = a_1 + 1 = 1 - d + 1 = 2 - d$, $b_2 = a_2 + 7 = 1 + 7 = 8$,
$b_3 = a_3 + 17 = 1 + d + 17 = 18 + d$.
Kadangi $b_1, b_2, b_3$ sudaro geometrinę progresiją, tai $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}$, $\frac{8}{2-d} = \frac{18+d}{8}$,
$d^2 + 16d + 28 = 0$, $d = -2$ ir $d = -14$.
Abu sprendiniai tinka:
kai $d = -2$, tai $a_1 = 3$ ir $a_3 = -1$;
kai $d = -14$, tai $a_1 = 15$, $a_3 = -13$.
*Atsakymas.* 3, 1, $-1$ arba 15, 1, $-13$.

**177.** Mažiausią skaičių pažymėkime $b$, geometrinės progresijos vardiklį $q$. Tada $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 65$. Seka $b_1 - 1$, $b_1q$, $b_1q^2 - 19$ yra aritmetinė progresija, todėl $2b_1q = b_1 + b_1q^2 - 20$. Gautą sistemą $\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 65, \\ b_1(1 - 2q + q^2) = 20 \end{cases}$ spręsti paprasčiausia dalijant vieną lygtį iš kitos: $\frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2} = \frac{13}{4}$, $9q^2 - 30q + 9 = 0$, $3q^2 - 10q + 3 = 0$, $q^2 - 3\frac{1}{3}q + 1 = 0$. Matome, kad šaknys yra $\frac{1}{3}$ ir 3. Kadangi progresija didėjanti, tai šaknis $q = \frac{1}{3}$ netinka, o kai $q = 3$, gauname $b_1 = 5$.
*Atsakymas.* 5, 15, 45.

**178.** Tarkime, kad stačiojo trikampio kraštinių ilgiai sudaro didėjančią geometrinę progresiją, kurios vardiklis yra $q$. Tada $y = xq$, $z = xq^2$. Remiantis Pitagoro teorema: $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + (xq)^2 = (xq^2)^2$, $x^2 + x^2q^2 - x^2q^4 = 0$, $x^2(1 + q^2 - q^4) = 0$. Kadangi $x \neq 0$, tai $q^4 - q^2 - 1 = 0$. Pažymėkime $q^2 = m$. Tada $m^2 - m - 1 = 0$, $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ir $m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Iš čia $q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(q^2 \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.




Iš šios lygybės gauname, kad $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} > 1$. Taigi suradome visus stačiuosius trikampius, kurių kraštinių ilgiai sudaro geometrinę progresiją. Tokių trikampių statinių ilgiai yra $x$ ir $xq$, o įžambinės ilgis $xq^2$, čia $x$ bet koks teigiamas skaičius.

**179.** Per 3 minutes naujieną sužinojo 2 žmonės, per $6 = 3 \cdot 2$ minutes — $4 = 2^2$ žmonės, per $9 = 3 \cdot 3$ minutes — $8 = 2^3$ žmonės ir t. t., per $3n$ minučių — $2^n$ žmonių. Kadangi $2^{18} = 262\,144 < 300\,000 < 2^{19} = 524\,288$, tai po $3 \cdot 19 = 57$ minučių naujieną jau žinos visi miesto žmonės.

**180.** Pažymėkime pirmojo kvadrato kraštinės ilgį $a_1 = a$, antrojo — $a_2$, trečiojo — $a_3$ ir t. t. Tada $a_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $a_3 = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$ ir t. t. Kvadratų kraštinių ilgiai sudaro mažėjančią geometrinę progresiją, kurios pirmasis narys lygus $a$, o $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
a) $a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{a}{4}$, $S_5 = \frac{a^2}{16}$, $P_5 = a$;
b) $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{16} =$
$a^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{31a^2}{16}$;
c) $S_1 + S_2 + \cdots = a^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = a^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$.

# 18. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

**1.** a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{2}{9}, \frac{5}{27}$; nei didėjanti, nei mažėjanti seka;
b) $0, \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}$; didėjanti seka;
c) 3, 6, 10, 16, 26; didėjanti seka;
d) 0, 2, 13, 60, 251; didėjanti seka;
e) $\log_2 3, \log_2 9, \log_2 27, \log_2 81, \log_2 243$; didėjanti seka;
f) $\log_{\frac{1}{2}} 10, \log_{\frac{1}{2}} 100, \log_{\frac{1}{2}} 1000, \log_{\frac{1}{2}} 10\,000, \log_{\frac{1}{2}} 100\,000$; mažėjanti seka.

**2.** a) 1, 2, 3, 4, 5; b) 1, 2, ..., 51; c) 1, 2, 3; d) 3.

**3.** a) $-13{,}5$; $-10$; $-6{,}5$; b) 17; 10; 3; c) $-3{,}15$; $-2{,}1$; $-1{,}05$;
d) $5\frac{2}{3}$; 6; $6\frac{1}{3}$.

**4.** a) $a_1 = 38{,}35$, $d = -2{,}15$; b) $a_1 = 11$, $d = -0{,}7$;
c) $a_1 = 2{,}8$, $d = 1{,}2$; d) $a_1 = -38{,}4$, $d = 0{,}4$.

**5.** a) Kadangi $a_7 - a_2 = 20$, tai $a_1 + 6d - (a_1 + d) = 20$, $5d = 20$, $d = 4$. Kadangi $a_3 = 9$, tai $a_1 + 2d = 9$, $a_1 = 9 - 2 \cdot 4 = 1$. Tada $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, $91 = \frac{2 \cdot 1 + 4(n-1)}{2} \cdot n$, $2n^2 - n - 91 = 0$, $n_1 = -6{,}5$ (netinka), $n_2 = 7$.
b) 12.

**6.** a) $3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^7 \cdot \ldots \cdot 3^{2n+1} = 27^5$, $3^{3+5+7+\cdots+2n+1} = (3^3)^5$, $3 + 5 + 7 + \cdots + 2n + 1 = 15$. Kairėje lygybės pusėje yra aritmetinės progresijos, kurios $a_1 = 3$, $d = 2$, $a_n = 2n + 1$, narių suma. Todėl $\frac{3+2n+1}{2} \cdot n = 15$, $n^2 + 2n - 15 = 0$, $n_1 = -5$ (netinka), $n_2 = 3$.
b) 3.

**7.** Surašykime natūraliuosius triženklius skaičius, kuriuos dalijant iš 4 liekana yra 3: 103, 107, 111, ..., 999. Šie skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios $a_1 = 103$, $d = 4$, $a_n = 999$. Tada $999 = 103 + 4(n - 1)$, $n = 225$ ir $S_{225} = \frac{103+999}{2} \cdot 225 = 123\,975$.

**8.** Kadangi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 56$ ir $a_1 = 11$, tai $d = 2$.
Kadangi $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 112$, tai
$a_1 + d(n - 4) + a_1 + d(n - 3) + a_1 + d(n - 2) + a_1 + d(n - 1) = 112$.
Suprastinę kairiąją lygybės pusę ir įstatę $a_1 = 11$, $d = 2$, gausime $n = 11$.

**9.** $-1$ arba 11.

**10.** $a_1 = -2$, $d = 1$.
*Nurodymas.* Sprendžiame sistemą: $\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15, \\ a_1 + a_2 + a_3 = -3. \end{cases}$

**11.** Pirmoji skruzdė per pirmą valandą nuropojo 25 m, per antrą — 25,5 m, per trečią — 26 m ir t. t. Šie skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios $a_1 = 25$, $d = 0{,}5$. Per $n$ valandų pirmoji skruzdė nuropojo $\frac{2 \cdot 25 + 0{,}5(n-1)}{2} \cdot n$ (m). Antroji skruzdė per pirmą valandą nuropojo 30 m, per antrą — 29,5 m, per trečią — 29 m ir t. t. Šie skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios $a_1 = 30$, $d = -0{,}5$. Per $n$ valandų antroji skruzdė nuropojo $\frac{2 \cdot 30 - 0{,}5(n-1)}{2} \cdot n$ (m). Pirmoji skruzdė pavys antrąją, kai jų per $n$ valandų nuropotų atstumų skirtumas bus 13 m, t. y. $\frac{2 \cdot 25 + 0{,}5(n-1)}{2} \cdot n - \frac{2 \cdot 30 - 0{,}5(n-1)}{2} \cdot n = 13$. Išsprendę šią lygtį gausime, kad tai įvyks po 13 val.

**12.** a) Jei $a_n$ — aritmetinė progresija, tai $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.
Taigi $\sqrt{x - 1} = \frac{\sqrt{x-9} + \sqrt{x+15}}{2}$. Išsprendę lygtį gauname, kad $x = 10$. Iš tikrųjų, kai $x = 10$, turime seką 1; 3; 5, kuri yra aritmetinė progresija.
b) Tokių $x$ reikšmių nėra.

**13.** a) 4; b) 7; c) 8; d) 13.

**14.** a) $\frac{25(5^n - 1)}{4}$; b) $\frac{4(1 - 4^{-n})}{3}$; c) $24(2^n - 1)$; d) $\frac{45(1 - 3^{-n})}{2}$.

**15.** 2, 6, 18 arba 18, 6, 2.
*Nurodymas.* Sprendžiame sistemą: $\begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 26, \\ b_1 + 1 + b_1 q^2 + 3 = 2(b_1 q + 6) \end{cases}$
(plg. 177 uždavinio sprendimą).

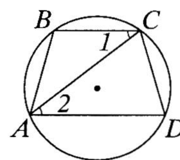
**16.** 4, 10, 16 arba 16, 10, 4.
*Nurodymas.* Sprendžiame sistemą: $\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 30, \\ (a_1 + d - 2)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 2d). \end{cases}$

**17.** a) $-1, 3, -9$ arba $-9, 3, -1$; b) $1, -3, 9$ arba $9, -3, 1$.
*Nurodymas.* Sprendžiame sistemą:
a) $\begin{cases} a + aq + aq^2 = -7, \\ \frac{a+aq^2}{2} = aq - 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} a + aq + aq^2 = 7, \\ \frac{a+aq^2}{2} = aq + 8. \end{cases}$

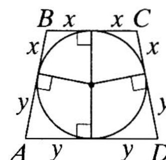
**18.** a) $85\frac{1}{3}$; b) 90; c) 518,4; d) $-275$; e) $\frac{5\sqrt{5}-5}{2}$; f) $\sqrt{3}+1$.

**19.** a) $2\frac{2}{3}$; b) $3\frac{7}{30}$; c) $1\frac{3}{11}$; d) $\frac{17}{110}$; e) $\frac{27}{110}$; f) $10\frac{17}{450}$.

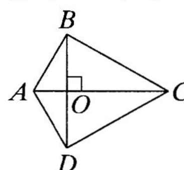
**20.** *I būdas.* $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC = 180°$ (įbrėžtinio keturkampio savybė). $\angle BAD + \angle ABC = \angle BCD + \angle ADC = 180°$ (vidaus vienašaliai kampai). Iš šių lygybių išplaukia, kad $\angle ABC = \angle BCD$. Vadinasi, $ABCD$ — lygiašonė trapecija.
*II būdas.* Tegul $ABCD(BC \parallel AD)$ — į apskritimą įbrėžta trapecija. Nubrėžkime trapecijos įstrižainę $AC$. Tada $\angle 1 = \angle 2$ — vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių $AD$ ir $BC$ bei kirstinės $AC$. Lygius įbrėžtinius kampus atitinka ir lygūs lankai, į kuriuos jie remiasi, todėl $\smile AB = \smile CD$. To paties apskritimo lygių lankų stygos yra lygios, todėl $AB = CD$ ir trapecija $ABCD$ yra lygiašonė.



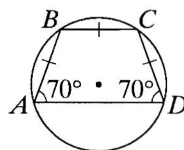

**21.** *I būdas.* $AB + CD = BC + AD$ — apibrėžtinio keturkampio savybė. Kadangi $P_{ABCD} = 28\,\text{cm}$, tai $2(AB + CD) = 28$, $AB + CD = 14$. Kadangi $ABCD$ — lygiašonė trapecija, tai $AB = CD$ ir $2AB = 14$, $AB = 7\,\text{cm}$.
*II būdas.* Sprendžiame lygtį: $4x + 4y = 28$, $4(x + y) = 28$, $x + y = 7$.
*Atsakymas.* 7 cm.



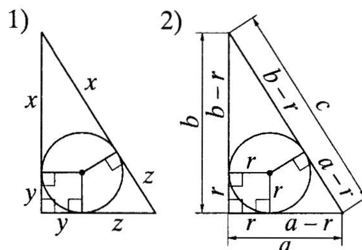

**22.** Kadangi $AO = \frac{1}{2}AB$, tai $\angle ABO = 30°$. Kadangi trikampis $BCD$ yra lygiakraštis, tai $\angle DBC = 60°$. Tada $\angle ABC = 90°$. Kadangi trikampis $ABD$ yra lygiašonis, tai $\angle ADB = \angle ABD$. Taigi ir $\angle ADC = 90°$. Keturkampio $ABCD$ priešingų kampų sumos lygios po 180°. Vadinasi, apie jį galima apibrėžti apskritimą.




**23.** $\angle A$ — įbrėžtinis ir remiasi į lanką $BCD$, $\smile BC + \smile CD = 2 \cdot 70° = 140°$.
Kadangi $BC = CD$, tai ir $\smile BC = \smile CD = \frac{1}{2} \cdot 140° = 70°$.
Analogiškai randame, kad $\smile AB = \smile BC = \smile CD = 70°$.
Tada $\smile AD = 360° - 3 \cdot 70° = 150°$.
*Atsakymas.* 70°, 70°, 70°, 150°.




**24.** *I būdas.* Pagal sąlygą sudarome sistemą: $\begin{cases} x + 2y + z = s, \\ x + z = c; \end{cases}$ $2y = s - c$.
*II būdas.* Pagal sąlygą $a + b = s$, $a - r + b - r = c$, $2r = a + b - c = s - c$.
*Atsakymas.* $s - c$.
*Pastaba.* Vadovėlyje pateiktas ne skersmens, bet spindulio atsakymas.

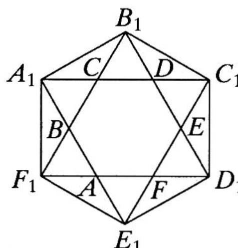



**25.** Sakykime, kad trikampio kraštinės ilgis yra $a$, kvadrato — $b$, o taisyklingojo šešiakampio — $c$. Pagal sąlygą $3a = 4b = 6c$. Iš čia $b = \frac{3a}{4}$, $c = \frac{a}{2}$.
Figūrų plotų santykis lygus:
$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} : b^2 : \frac{c^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{9a^2}{16} : \frac{a^2\sqrt{3}\cdot 6}{16} = 4\sqrt{3} : 9 : 6\sqrt{3}$.

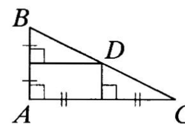
**26.** a) $a_3 = R\sqrt{3}$, $a_3 = 2r\sqrt{3}$, $R = 2r$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$;
b) $a_4 = R\sqrt{2}$, $a_4 = 2r$, $R\sqrt{2} = 2r$, $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
c) $a_6 = R$, $a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$, $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$, $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

**27.** Kadangi $a_3 = R\sqrt{3}$ ir $a_3 = \sqrt{6}$, tai $R = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.
Kadangi $a_4 = R\sqrt{2}$, tai $a_4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.
*Atsakymas.* $a_4 = 2$, $R = \sqrt{2}$.

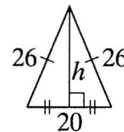
**28.** Taisyklingojo šešiakampio vidaus kampas lygus $\frac{180° \cdot (6-2)}{6} = 120°$. Tada $\angle F_1AB = \angle F_1BA = 60°$ ir $\triangle ABF_1$ — lygiakraštis. Analogiškai įrodoma, kad trikampiai $BCA_1$, $CDB_1$, $DEC_1$, $EFD_1$, $FAE_1$ taip pat lygiakraščiai. Vadinasi, $AF_1 = BF_1 = BA_1 = CA_1 = \dots = FE_1 = AE_1$.
Trikampiai $A_1B_1C$, $B_1C_1D$, $C_1D_1E, \dots$, $F_1A_1B$ yra lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Iš šių trikampių lygumo gauname, kad $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = \dots = F_1A_1$. Nesunku įrodyti, kad šešiakampio $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ kampai taip pat yra lygūs, vadinasi, jis yra taisyklingasis.



**29.** *I būdas.* $DC = DA = DB$ — atkarpos vidurio statmens savybė. Trikampiai $ABD$ ir $ACD$ yra lygiašoniai, todėl: $\angle BAD = \angle ABD$; $\angle CAD = \angle ACD$. Lygybes panariui sudedame: $\angle BAD + \angle CAD = \angle ABD + \angle ACD$. Iš čia $\angle BAC = \angle ABD + \angle ACD$. Vadinasi, $\angle BAC = 90°$.
*II būdas.* Taškas $D$ — apie $\triangle ABC$ apibrėžto apskritimo centras. Kadangi taškas $D$ yra kraštinėje $BC$, tai $\triangle BAC$ — status, t. y. $\angle A = 90°$.




**30.** Pagal Pitagoro teoremą: $h = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ (cm).
Trikampio plotas $S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 24 = 240$ (cm$^2$).
Į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys $r = \frac{S}{p} = \frac{240}{36} = \frac{20}{3}$ (cm).
*Atsakymas.* $6\frac{2}{3}$ cm.

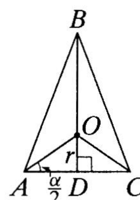



**31.** Sąlygoje neteisingai nurodytas apskritimo spindulio ilgis. Jis lygus 3 cm (o ne 4 cm). Remdamiesi liestinių savybe gauname: $P = 2(3 + 5 + 12) = 40$ (cm). Jei analogiškai skaičiuotume imdami spindulį 4 cm, tai gautume trikampį su kraštinėmis 17, 16 ir 9. Bet tas trikampis nėra statusis, todėl reiktų padaryti išvadą, kad tokia situacija negalima.

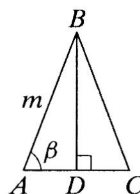
**32.** *I būdas.* Stačiojo trikampio įžambinės ilgis yra lygus $\sqrt{21^2 + 20^2} = 29$ (cm).
Tada $P_\triangle = 21 + 20 + 29 = 70$ (cm), $S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210$ (cm$^2$).
Apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulį rasime iš formulės $R = \frac{abc}{4S}$,
$R = \frac{21 \cdot 20 \cdot 29}{4 \cdot 210} = 14{,}5$ (cm); įbrėžto — iš formulės $r = \frac{S}{p}$, $r = \frac{210}{35} = 6$ (cm).
*II būdas.* Stačiojo trikampio įžambinė $c = 29$ cm.
Tada $R = \frac{c}{2} = \frac{29}{2} = 14{,}5$ (cm), o $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{20+21-29}{2} = 6$ (cm).
*Atsakymas.* $R = 14{,}5$ cm, $r = 6$ cm.

**33.** Lygiašonio trikampio pagrindo ilgis lygus $2\sqrt{10^2 - 8^2} = 12$ (cm), o
$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ (cm$^2$). Tada $R = \frac{abc}{4S} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = 6{,}25$ (cm).

**34.** a) *I būdas.* Nubrėžkime pusiaukampines $AO$ ir $CO$. Tada $OD = r$ — į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys. Iš stačiojo trikampio $ADB$:
$AB = \frac{h}{\sin\alpha}$, $AD = AB\cos\alpha = \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha}$. $S_{\triangle ABC} = h \cdot AD = \frac{h^2\cos\alpha}{\sin\alpha}$,
$p = AB + AD = \frac{h}{\sin\alpha} + \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{h(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$. Tada
$r = \frac{S}{p} = \frac{h^2\cos\alpha}{\sin\alpha} : \frac{h(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{h\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ ir $C = 2\pi r = \frac{2\pi h\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.
*II būdas.* $AD = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha}$, $r = AD \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{h \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{h\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.
Apskritimo ilgis $C = \frac{2\pi h\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.




b) Iš stačiojo trikampio $ADB$: $AD = m\cos\beta$. Tada $AC = 2m\cos\beta$,
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}m \cdot 2m\cos\beta \cdot \sin\beta = m^2\sin\beta\cos\beta$. Į trikampį įbrėžto skritulio spindulys $r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2m^2\sin\beta\cos\beta}{2m+2m\cos\beta} = \frac{m\sin\beta\cos\beta}{1+\cos\beta}$.
Tada skritulio plotas $S = \frac{\pi m^2\sin^2\beta\cos^2\beta}{(1+\cos\beta)^2}$.
*Atsakymas.* a) $\frac{2\pi h\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; b) $\frac{\pi m^2\sin^2\beta\cos^2\beta}{(1+\cos\beta)^2}$.




**35.** a) $a_{10} = 2r\operatorname{tg}18°$. Tada $P = 10 \cdot 2r\operatorname{tg}18° = 20 \cdot 12{,}3\operatorname{tg}18° = 246\operatorname{tg}18°$, o
$S = \frac{1}{2}Pr = \frac{1}{2} \cdot 246\operatorname{tg}18° \cdot 12{,}3 = 1512{,}9 \cdot \operatorname{tg}18° \approx 491{,}6$ (cm$^2$).
b) $S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 18^2 \cdot \sin 40°$. Tada $S_{\text{daugiakampio}} = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18^2 \cdot \sin 40° \approx 937$ (cm$^2$).

**36.** a) *I būdas.* Tegu apskritimo lietimosi taškas įžambinę dalija į dalis, kurių ilgis yra $x$ ir $y$. Tada $x + y = 17$ cm. Skaičiuodami trikampio perimetrą, gauname lygtį: $x + r + y + r = 23$, $17 + 2r = 23$ ir $r = 3$. Tada $S = \pi r^2 = 9\pi$ (cm$^2$).
*II būdas.* Sprendžiame sistemą: $\begin{cases} a + b = 23, \\ a^2 + b^2 = 17; \end{cases}$ čia $a$, $b$ — trikampio statinių ilgiai. Radę $a$ ir $b$, taikome formulę $r = \frac{a+b-c}{2}$ ir randame $r = 3$ cm.
Tada $S = 9\pi$ cm$^2$.
b) Tegu lygiašonio trikampio aukštinės, nubrėžtos į pagrindą, ilgis lygus $h$. Tada jo šoninės kraštinės ilgis yra $(h + 2)$ cm. Pagal Pitagoro teoremą: $(h + 2)^2 - h^2 = 6^2$ ir $h = 8$ cm. Trikampio plotas $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$(cm$^2$).
Tada $R = \frac{abc}{4S} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = 6{,}25$ (cm), o $C = 2\pi \cdot 6{,}25 = 12{,}5\pi$ (cm).

**37.** a) $S_4 = 144$ cm$^2$, tai $a_4 = 12$ cm. Kadangi $a_4 = R\sqrt{2}$, tai $R = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ (cm).
Tada $a_3 = R\sqrt{3} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{6}$ (cm) ir
$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 6\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$ (cm$^2$).
b) Lygiakraščio trikampio plotas $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Taigi $\frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}$ ir $a_3 = 18$ cm.
Kadangi $a_3 = R\sqrt{3}$, tai $R\sqrt{3} = 18$ ir $R = 6\sqrt{3}$ cm.
Tada $a_4 = R\sqrt{2} = 6\sqrt{6}$ (cm) ir $S_4 = a_4^2 = (6\sqrt{6})^2 = 216$ (cm$^2$).

**38.** Kadangi lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, tai apskaičiuojame ir sulyginame atkarpų $AC$ ir $BD$ vidurio taškų koordinates. Atkarpos $AC$ vidurio taškas $O(-1; 3)$. Kadangi $D(x; y)$, tai atkarpos $BD$ vidurio taškas $O\left(\frac{-9+x}{2}; \frac{8+y}{2}\right)$. Sprendžiame sistemą: $\begin{cases} \frac{x-9}{2} = -1, \\ \frac{y+8}{2} = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 7; \\ y = -2. \end{cases}$
*Pastaba.* Vadovėlyje duotas ne lygiagretainio $ABCD$, bet lygiagretainio $ABDC$ atsakymas.

**39.** Kolinearių vektorių koordinatės yra proporcingos.
a) Kadangi lygybė $\frac{-2}{1} = \frac{3,5}{-1,75}$ yra teisinga, tai vektoriai yra kolinearūs.
b) Kadangi lygybė $\frac{0,2}{0,4} = \frac{4}{2}$ neteisinga, tai vektoriai nėra kolinearūs.

**40.** a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 30° = 5 \cdot 2,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$;
b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3,5 \cdot \cos 120° = 7 \cdot (-\cos 60°) = -3,5$;
c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1,6 \cdot 0,5 \cdot \cos 0° = 0,8$;
d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 180° = -1$.

**41.** a) Kadangi $\cos(\widehat{\vec{p}, \vec{r}}) = 1$, tai $(\widehat{\vec{p}, \vec{r}}) = 0°$. Vadinasi, vektoriai $\vec{p}$ ir $\vec{r}$ yra lygiagretūs ir vienakrypčiai.
b) Kadangi $\cos(\widehat{\vec{p}, \vec{r}}) = -1$, tai $(\widehat{\vec{p}, \vec{r}}) = 180°$. Vadinasi, vektoriai $\vec{p}$ ir $\vec{r}$ yra lygiagretūs ir priešpriešiai.

**42.** a) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-12}{3 \cdot 4} = -1$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$;
b) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 \cdot 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°$;
c) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-1,5}{2 \cdot 1,5} = -\frac{1}{2}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$;
d) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{-5\sqrt{3}}{4 \cdot 2,5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 150°$.

**43.** a) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180° - 60° = 120°$, $(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 180° - 60° = 120°$;
b) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° + 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° = -4$.

**44.** Atėmę antrąją lygtį iš pirmosios, gausime: $-\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{16}{3} - \frac{9}{3}$. Pažymėkime $t = \frac{x}{y}$. Tada $-t + \frac{1}{t} = \frac{5}{6}$, $t_1 = -\frac{3}{2}$, $t_2 = -\frac{2}{3}$. Imdami $\frac{x}{y} = -\frac{3}{2}$ ir įstatę $x = -\frac{3}{2}y$ į pirmąją sistemos lygtį, gauname $-\frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2} = \frac{16}{3}$. Ši lygtis sprendinių neturi. Su $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, $x = \frac{2}{3}y$, gauname lygtį $\frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$, $y_1 = -3$, $y_2 = 3$ ir $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.
*Atsakymas.* $(-2; -3)$; $(2; 3)$.

**45.** Tegu ieškomasis skaičius $a = \overline{xy} = 10x + y$.
Tada pagal sąlygą $10x + y = 4(x + y) + 3$, $10x + y = 3xy + 5$.
Spręsdami lygčių sistemą $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 10x + y - 3xy = 5 \end{cases}$ gauname $x = 2$, $y = 3$.
Taigi ieškomas skaičius $a = 23$.

**46.** Jeigu dviratininko greitis yra $u$ km/h, o motociklininko — $v$ km/h, tai $\frac{v}{60} - \frac{u}{60} = 0,5$ ir $\frac{120}{u} - \frac{120}{v} = 2$.
Išsprendę sistemą gauname $u = 30$ km/h, $v = 60$ km/h.

**47.** Reiškinį $x^3 - 3x + 2$ galima išskaidyti taip:
$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x + 2)(x - 1)^2$.
Sudėję dešinės lygties pusės narius, gauname:
$\frac{x^2+5}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2+b(x+2)+c(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-1)^2}$,
$\frac{x^2+5}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{(a+c)x^2+(b+c-2a)x+a+2b-2c}{(x+2)(x-1)^2}$.
Su visais $x$ turi būti $x^2 + 5 = (a + c)x^2 + (b + c - 2a)x + a + 2b - 2c$. Taip bus tik tada, kai $a + c = 1$, $b + c - 2a = 0$ ir $a + 2b - 2c = 5$.
Gavome trijų lygčių sistemą. Ją galima suvesti į dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, įstačius į antrą ir trečią lygtis $a = 1 - c$. Išsprendę gauname $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$.
Beje, taip sprendžiant remiamasi neįrodytu teiginiu: jeigu du kvadratiniai trinariai lygūs su (beveik) visomis reikšmėmis, tai ir jų koeficientai lygūs. Norint tokiu teiginiu nesinaudoti, galima imti tris konkrečias $x$ reikšmes ir taip gauti reikiamą sistemą.
Vis dėlto trumpiausias sprendimas būtų toks — nieko nepertvarkinėti, o iš karto imti 3 patogias $x$ reikšmes. Kadangi imti 1 ir $-2$ negalima, tai imame $x = 0$, $x = 2$ ir $x = -1$. Tada $\frac{5}{2} = \frac{a}{2} + b - c$, $\frac{9}{4} = \frac{a}{4} + b + c$, $\frac{6}{4} = a + \frac{b}{4} - \frac{c}{2}$, ir turime

sistemą $a+2b-2c=5$, $a+4b+4c=9$, $4a+b-2c=6$. Sudedame visas tris lygtis, $6a+7b=20$; atimame iš trečios pirmą, $3a-b=1$. Dauginame pastarąją iš 7 ir pridedame prie ankstesnės: $27a=27$, $a=1$. Todėl $b=3a-1=2$, o tada $2c=a+2b-5=0$, $c=0$. Patikriname — šios reikšmės tenkina sistemą. Liko įsitikinti, kad su visomis $x$ reikšmėmis (žinoma, išskyrus $x=1$ ir $x=-2$) tapatybė $\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x-1)^2}$ teisinga, o tam užtenka atlikti veiksmus dešinėje pusėje:
$\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+1+2x+4}{(x+2)(x^2-2x+1)}=\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2}=\frac{x^2+5}{x^3-3x+2}$. Taigi šitaip sprendžiant nereikia nei skaidyti, nei remtis daugianarių lygybės teorema.

**48.** a) Padauginę abi lygties puses iš $x+2$, gauname: $(x+2)\sqrt{x}+2x+1=2(x+2)$, $(x+2)\sqrt{x}-3=0$. Toliau galima spręsti pakeitus nežinomąjį: $z=\sqrt{x}$. Turėsime: $(z^2+2)z-3=0$, $z^3+2z-3=0$, $z^3-z+3z-3=0$, $z(z^2-1)+3(z-1)=0$, $(z-1)(z^2+z+3)=0$. Ši lygtis turi vienintelį sprendinį $z=1$. Taigi tik $x=1$ galėtų būti pradinės lygties sprendinys. Patikriname — tinka.
Žinoma, trumpiausias sprendimas toks: perkeliame trupmeną į dešinę pusę, tada $\sqrt{x}=\frac{3}{x+2}$. Reikšmė $x=1$ tinka, o daugiau sprendinių nėra, nes intervale $[0;+\infty)$ kairė pusė didėja, o dešinė mažėja.
b) Lygties sprendinius lengva nustatyti interpretuojant lygtį geometriškai: reikia rasti visus skaičių tiesės taškus, kurių atstumų iki taškų $x_1=0$ ir $x_2=1$ suma būtų lygi 1. Aišku, kad tinka visi intervalo $[0;1]$ skaičiai. Kiti skaičiai netinka, nes atstumų suma (ir net vienas iš atstumų) bus didesnis už vienetą.

**49.** a) Kadangi $(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27})^2=\sqrt{3}-2\cdot3+\sqrt{27}=4\sqrt{3}-6$,
$(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27})^2=\sqrt{3}+2\cdot3+\sqrt{27}=4\sqrt{3}+6$,
tai duotas reiškinys lygus sandaugai:
$(4\sqrt{3}-6+7)(4\sqrt{3}+6-7)=(4\sqrt{3}+1)(4\sqrt{3}-1)=3\cdot16-1=47$.
b) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}-\sqrt{3}=\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3}}-\sqrt{3}=$
$\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}=1$.
Beje, sprendžiant tokius uždavinius — visa viltis, kad šaknys „išsitrauks", t. y. kad $10+6\sqrt{3}=(a+b\sqrt{3})^3$ su tam tikrais „paprastais" $a$ ir $b$. Kadangi $(a+b\sqrt{3})^3=a^3+3a^2b\sqrt{3}+3ab^2\sqrt{3}+b^3 3\sqrt{3}$, tai $a$ ir $b$ ieškome iš sistemos $a^3+9ab^2=10$, $3a^2b+3b^3=6$. Jos nė spręsti nereikia — matome, kad tinka $a=b=1$, taigi $10+6\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^3$. Panašiai galima elgtis ir traukiant šaknį $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

**50.** Nelygybę $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$ perrašykime taip: $(a+b)(a^2-ab+b^2)\geqslant ab(a+b)$. Kadangi $a+b>0$, tai pakanka įsitikinti, kad $a^2-ab+b^2\geqslant ab$. Tačiau ši nelygybė išplaukia iš akivaizdžios nelygybės $(a-b)^2\geqslant0$.
Dar paprasčiau perkelti visus narius į kairę: $a^3-a^2b+b^3-ab^2\geqslant0$. Kairę pusę išskaidome: $a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)(a^2-b^2)$. Gavome akivaizdžią nelygybę $(a-b)^2(a-b)\geqslant0$.

**51.** Perrašykime reiškinį sudauginę daugiklių poras:
$n(n+3)=n^2+3n$, $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$, $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=a^2+2a+1=(a+1)^2$, kur $a=n^2+3n$.

**52.** a) $f(x)=(\sin^4x+2\sin^2x\cos^2x+\cos^4x)-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}(\sin2x)^2$.
Taigi $E_f=\left[\frac{1}{2};1\right]$.
b) $E_f=[0;\sqrt{3}]$.

**53.** a) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$;
b) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\operatorname{arctg}0\right)=\cos(-\frac{\pi}{4}-0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**54.** Pereikime prie logaritmų tuo pačiu pagrindu, pavyzdžiui, pagrindu $a=2$. Tada $\log_3(2002!)=\frac{\log_2(2002!)}{\log_2 3}$, $\log_4(2002!)=\frac{\log_2(2002!)}{\log_2 4}$, ..., o duotasis reiškinys lygus
$\frac{2002}{\log_2(2002!)}+\frac{2002\cdot\log_2 3}{\log_2(2002!)}+\dots+\frac{2002\cdot\log_2 2002}{\log_2(2002!)}=2002\cdot\frac{\log_2(2\cdot3\cdot\ldots\cdot2002)}{\log_2(2002!)}=2002$.
Dar geriau nebijoti pagrindo 2002!. Tada taikydami formulę $\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$ turime:
$2002(\log_{2002!}2+\log_{2002!}3+\dots+\log_{2002!}2002)=$
$2002\log_{2002!}(2\cdot3\cdot\ldots\cdot2002)=2002$.

# IV. ĮVYKIAI IR TIKIMYBĖS

## 19. BANDYMAI, BAIGTYS, ĮVYKIAI

### 19.1. Bandymai ir baigtys

Skyrelio pagrindinis tikslas — aptarti bandymo, kurio baigtys atsitiktinės, sąvoką ir parodyti, kad tokie bandymai gali būti įvairūs.

Nuo bandymo baigčių išvardijimo prasideda bet koks tikimybinis tyrinėjimas. Kartais nereikia ilgai galvoti, kas yra bandymo baigtis ir kaip ją užrašyti (pavyzdžiui, monetos metimo bandyme). Tačiau kartais susivokti, kas gi yra ta bandymo baigtis, nėra taip lengva. Taip pat reikia suvokti, kad fiziniai veiksmai vienareikšmiškai neapibrėžia bandymo ir jo baigčių. Tai atliekame mes patys, fiziniam kontekstui mums rūpimu požiūriu aprašyti išskirdami tam tikras struktūras. Apibrėžti bandymą reiškia ne tik nusakyti, ką darysime, tačiau ir tai, ką stebėsime. Taigi bandymas yra tikrovės reiškinio, kurį valdo atsitiktinumai, matematinis modelis. Su tuo pačiu reiškiniu galima susieti skirtingus bandymus. Pavyzdžiui, tegu veiksmas — kauliuko metimas. Natūralu stebėti, kiek akučių atvirto. Tada bandymo baigtys šešios. Tačiau kam nors galbūt tai visai nerūpės, galbūt jam bus įdomu tik tai, ar atvirtusių akučių skaičius lyginis, ar nelyginis. Tada jis išskirs tik dvi baigtis. Jeigu su tuo pačiu reiškiniu galima susieti ne vieną bandymą, tai kuris gi sprendimas teisingas? Visi teisingi, tačiau ne visi suteikia galimybę gauti atsakymą į rūpimą klausimą. Juk ir pertvarkant reiškinius galima taikyti įvairius pertvarkius, tačiau vieni mus tolina, kiti artina prie tikslo. Kartais verta sumas pakelti laipsniais ir suprastinti panašius narius, o kartais priešingai — geriau išskirti reiškinių laipsnius.

Ir dar yra vienas bruožas, susijęs su bandymo apibrėžimu. Išskyrę bandymo baigtis turime parinkti joms žymenis. Čia irgi nėra jokio vienareikšmiškumo. Laisvė kūrybai! Vienintelis kriterijus — vaizdumas ir patogumas naudojantis.

Galima prisiminti ištrauką iš anglų matematiko D. Litlvudo knygos „Matematinės įvairenybės“. Apie Žordano (žymaus prancūzų matematiko) knygas sakoma: jeigu jam reikėdavo įvesti keturis analogiškus arba panašius dydžius (pavyzdžiui, $a$, $b$, $c$, $d$), tai jis pasirinkdavo maždaug tokius jam patogius žymenis: $a$, $M_3'$, $\epsilon_2$, $\Pi_{1,2}''$".

***Suvokiame ir žinome:***

bandymo sąvoką;

bandymo baigties (elementariojo įvykio) sąvoką.

***Mokame:***

išvardyti įvairių bandymų baigtis;

parinkti bandymo baigtims žymenis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Visi dešimt šio skyrelio uždavinių skirti bandymo ir jo baigčių savokų įsisavinimui. Sąlygos apibūdina ir patį bandymą, ir tai, kas stebima. Todėl užrašant baigčių aibę dvejonių neturėtų kilti. Žinoma, žymenis galima pasirinkti kuo patogesnius. Kiek įdomesnis yra 10 uždavinys — reikėtų atkreipti dėmesį, kad bandymas yra futbolo turnyras. Vadinasi, baigtis yra trijų komandų tarpusavio susitikimų rezultatai. Stokojant laiko, galima visų uždavinių nespręsti.

**1.** Baigčių aibė $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$; čia $e_i$ žymi baigtį, kad tetraedras atsistojo ant sienelės, kurioje pažymėta $i$ akučių.
*Pastaba.* Galima baigtis žymėti ir tiesiog akučių skaičiais: $\{1, 2, 3, 4\}$, tik reikia paaiškinti, kokia prasmė šiuo atveju suteikiama skaitmenims. Tačiau, kad akučių skaičiai ir baigtys „nesusiplaktų“, tikriausiai taip baigčių žymėti neverta skatinti bent jau iš pradžių.

**2.** Jei kauliukas atsistojo ant sienelės, ant kurios pažymėtos, pavyzdžiui, trys akutės, o moneta atvirto herbu, tai tokią baigtį galima žymėti $3H$; jeigu moneta atvirto skaičiumi — $3S$. Tada baigčių aibė bus tokia: $\{1H, 2H, 3H, 4H, 1S, 2S, 3S, 4S\}$. Žinoma, baigtis galima žymėti ir kitaip.

**3.** a) Galimos trys baigtys: ištrauktas žalias, raudonas arba mėlynas rutulys. Jei pažymėsime šias baigtis, pavyzdžiui, raidėmis $\check{Z}$, $R$, $M$, tai baigčių aibę galėsime užrašyti taip: $\{\check{Z}, R, M\}$.
b) Trumpai tariant, bandymo baigtis — du rutuliai ant delno. Jeigu ant delno yra du žali rutuliai, tokią baigtį pažymėkime, pavyzdžiui, $\check{Z}\check{Z}$. Taigi bandymo baigčių aibė yra tokia: $\{\check{Z}\check{Z}, \check{Z}R, \check{Z}M, MM, MR, RR\}$.

**4.** Jeigu partija baigėsi Algio pergale, tokią baigtį žymėkime $A$, jeigu Broniaus pergale — $B$, o jeigu lygiosiomis — $L$. Tada baigčių aibė yra: $\{A, B, L\}$.

5. Baigčių aibė yra $\{AA, AB, BA, BB\}$; čia, pavyzdžiui, $AB$ reiškia, kad pirmasis pacientas pasirinko gydytoją Algį, o antrasis — Birutę.

6. Baigčių aibė yra {ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}.

7. Baigčių aibė yra $\{TT, TN, NT, NN\}$; čia, pavyzdžiui, $NT$ reiškia, kad pirmasis šūvis buvo netaiklus, o antrasis taiklus.

8. Baigčių aibė yra $\{PPP, PPN, PNP, NPP, PNN, NPN, NNP, NNN\}$; čia, pavyzdžiui, $PPN$ reiškia, kad pirmasis ir antrasis medeliai prigijo, o trečiasis — ne.

9. Baigčių aibė yra $\{LL, LN, NL, NN\}$; čia, pavyzdžiui, $LN$ reiškia, kad pirmosios loterijos bilietas laimėjo, o antrosios — ne.

10. Trijų komandų turnyre bus sužaistos trejos rungtynės. Taigi bandymo baigtis — trijų rungtynių rezultatai. Galima priskirti komandoms numerius (pirmoji, antroji, trečioji) ir baigtį ir surašyti turnyro rezultatus į lentelę. Pavyzdžiui, lentelė

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| I | * | 0 | 1 |
| II | 1 | * | 1 |
| III | 0 | 0 | * |

reiškia tokią baigtį: pirmoji komanda pralaimėjo prieš antrąją ir laimėjo prieš trečiąją, antroji komanda laimėjo prieš trečiąją (lygiosios negalimos). Visas baigtis vaizduojančias lenteles galima sudaryti taip: virš įstrižainės į kiekvieną iš trijų langelių galima įrašyti bet kurį iš dviejų elementų — 0 arba 1. Tuomet langeliai po įstrižaine bus užpildyti atitinkamais elementais. Vadinasi, iš viso skirtingų lentelių galėsime sudaryti $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Tai ir yra visos šio bandymo baigtys.
*Pastaba.* Jeigu turnyre būtų galimos ir lygiosios, bandymo baigtis galėtume užrašyti panašiai. Tuomet, pavyzdžiui, lentelė

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| I | * | 0 | 0,5 |
| II | 1 | * | 1 |
| III | 0,5 | 0 | * |

reikštų tokią baigtį: pirmoji komanda pralaimėjo prieš antrą ir sužaidė lygiosiomis su trečiąja, antroji komanda laimėjo prieš trečią. Nesunku suvokti, kad visas baigtis vaizduojančias lenteles galima sudaryti taip: virš įstrižainės į kiekvieną langelį galima įrašyti bet kurį iš trijų elementų : 0; 1; 0,5, o tada atitinkamai užpildyti langelius po įstrižaine. Iš viso būtų $3 \times 3 \times 3 = 27$ tokios lentelės, t. y. bandymo baigtys.

## 19.2. Atsitiktiniai įvykiai

Jeigu jau apibrėžėme bandymo baigtis, tai kartu apribojome ir šeimą atsitiktinių įvykių, kuriuos galima nagrinėti. Pavyzdžiui, jeigu su kauliuko metimu susiejame tik tris baigtis: {atvirto pirminis akučių skaičius}, {atvirto sudėtinis akučių skaičius}, {atvirto vienetas}, tai įvykio {atvirto ne mažiau kaip penkios akutės} nagrinėti negalėsime.

Svarbiausias skyrelio tikslas — įtvirtinti supratimą, kad apibrėžus bandymą galima su juo susieti ir nagrinėti tik tuos atsitiktinius įvykius, kuriuos galima pavaizduoti baigčių aibėmis.

Skirkime šiek tiek laiko atsitiktinių įvykių nusakymo naudojantis įprastine kalba ir nusakymo naudojantis formalia aibių simbolika tapatumui — tą patį įvykį galima nusakyti žodžiais (pavyzdžiui, {atvirto lyginis akučių skaičius}) ir užrašyti palankių jam baigčių aibe.

Priešingojo, taip pat ir nesutaikomų įvykių apibrėžimus galima papildyti apibūdinant šias sąvokas, apibrėžtas naudojantis baigtimis, žodžiais. Įvykiui $A$ priešingasis įvykis neįvyksta, jeigu įvyksta įvykis $A$. Jeigu įvykis $A$ neįvyksta, tai priešingasis jam įvykis būtinai įvyksta. Nesutaikomi įvykiai niekada neįvyksta kartu. Arba įvyksta tik vienas iš jų, arba neįvyksta nei vienas. Nėra tokios baigties, kuria „džiaugtųsi“ abu nesutaikomi įvykiai.

Tiesa, žodžiais nusakyti atsitiktinius įvykius galima ir neminint jokių baigčių. Pavyzdžiui, {ryt ir poryt lis}. Ar tikimybių teorija nagrinėja ir tokius įvykius? Galima atsakyti taip: kol aiškiai neapibrėžtas bandymas, kol šio įvykio negalima pavaizduoti palankių jam baigčių aibe, tol toks atsitiktinis įvykis nėra matematinio tyrimo objektas. Taigi norėdami šį įvykį nagrinėti, turime sukurti „matematinį pagrindą“. Dažniausiai tai įmanoma padaryti. Tiesa, dažnai matematikoje iš tiesų kalbama apie atsitiktinius įvykius, tačiau neminimos jiems palankios baigtys, t. y. „matematinis pagrindas“. Taip elgiamasi todėl, kad gerai dalyką išmanantys žmonės žino, kad tą pagrindą galima sukurti, todėl negaištama aptariant šios konstrukcijos detales.

***Suvokiame ir žinome:***

kaip atsititiktiniai įvykiai vaizduojami baigčių aibėmis;
būtinojo įvykio sąvoką;
negalimojo įvykio sąvoką;
priešingojo įvykio sąvoką;
nesutaikomų įvykių sąvoką.

***Mokame:***

nusakyti su bandymu susijusius atsitiktinius įvykius žodžiais;
nusakyti su bandymu susijusius atsitiktinius įvykius palankių jiems baigčių aibėmis.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

11 uždavinys skirtas būtinojo, negalimojo ir atsitiktinio įvykių sąvokoms įtvirtinti. 12 uždavinys — užduotis, kai konkrečius įvykius reikia išreikšti bandymo baigčių aibėmis (o ir pačią baigčių aibę reikia susikurti). 13 ir 14 uždaviniai iliustruoja nesutaikomų įvykių sąvoką. Būtų naudinga išnagrinėti visus keturis šio skyrelio uždavinius.

**11.** Būtinieji įvykiai: $C$, $E$, $F$; negalimasis — $A$; visi kiti — atsitiktiniai.

**12.** a) Baigčių aibė yra $\{SS, SH, HS, HH\}$; čia, pavyzdžiui, $HS$ reiškia, kad pirmoji moneta atvirto herbu, antroji — skaičiumi.
b) $A = \{SS, SH, HS\}$, $B = \{SH, HS, HH\}$, $C = \{HH\}$, $D = \{SS\}$.
c) Nesutaikomų įvykių poros: $A$ ir $C$; $B$ ir $D$; $C$ ir $D$.
d) $\overline{A} = C$, $\overline{B} = D$, $\overline{C} = A$, $\overline{D} = B$.

**13.** a) Nesutaikomų įvykių pora tik viena: $A$ ir $C$.
b) $\overline{A} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $\overline{B} = \{1, 3, 5\}$, $\overline{C} = \{1, 2, 3, 4\}$; čia, pavyzdžiui, 3 žymi baigtį, kad atsivertė trys kauliuko akutės.
$\overline{A}$ — atsivertė ne 4 akutės,
$\overline{B}$ — atsivertė nelyginis akučių skaičius,
$\overline{C}$ — atsivertė ne daugiau kaip 4 akutės.

**14.** a) $\overline{A}$ reiškia įvykį, kad į sritį $S_1$ nepataikyta.
b) Sritį $S_2$ reikia pažymėti taip, kad ji neturėtų bendrų taškų su sritimi $S_1$.

## 19.3. Įvykių veiksmai

Šiame skyrelyje pirmą kartą aibių veiksmai yra esminė teorijos dėstymo dalis. Iki šiol veiksmus su aibėmis naudojome vien tik gautam rezultatui (pavyzdžiui, sprendinių aibei) užrašyti.
Naudojantis Veno diagramomis įvykių veiksmus paaiškinti nesudėtinga. Todėl tie veiksmai gali būti suvokti gana formaliai. Šiek tiek daugiau apie juos pagalvoti galima paskatinti klausimais: kada dviejų įvykių sąjunga lygi vienam iš šių įvykių? Kada sąjunga lygi būtinajam įvykiui? Kada įvykių sankirta lygi vienam iš įvykių? ir t. t.

Kitas klausimas, kuriam irgi reikėtų skirti kiek dėmesio — atlikus veiksmus su įvykiais, gautų naujų įvykių nusakymas žodžiais. Šitaip tarsi pabrėžiame, kad įvykių interpretavimas palankių jiems įvykių aibėmis yra matematinis realių, mums rūpimų reiškinių modelis.

***Suvokiame ir žinome*** veiksmų su įvykiais apibrėžimus.

***Mokame:***
pavaizduoti įvykių veiksmais gautus įvykius diagramomis;
įvykių veiksmais gautus įvykius nusakyti žodžiais.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Įvykių veiksmais iš vienų įvykių galima gauti kitus su tuo pačiu bandymu susijusius įvykius. Tai labai svarbu tikimybių teorijoje. Šiame skyrelyje nagrinėjami su įvairiais bandymais susiję įvykiai. Tikslas — išmokyti atlikti įvykių veiksmus, ir kas ypatingai svarbu — suvokti, ką padarei, t. y. gautuosius įvykius apibūdinti žodžiais. Uždavinių čia nemažai, todėl kai kuriuos iš jų (pavyzdžiui, 23–25) galima užduoti namų darbams. Nemažai laiko reikalauja ir 20 uždavinio sprendimas, nes ir įvykiui $A$, ir įvykiui $C$ palankių baigčių gana daug.

**15.** Baigčių aibė yra $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; čia skaičiumi $i$ žymima baigtis, kad atsivertė $i$ akučių.
Įvykis $A \cup B$ yra būtinasis,
$A \cap B$ — „atsivertė 5 akutės“,
$A \setminus B$ — „atsivertė 6 akutės“,
$B \setminus A$ — „atsivertė mažiau kaip 5 akutės“,
$\overline{A}$ — „atsivertė mažiau kaip 5 akutės“,
$\overline{B}$ — „atsivertė 6 akutės“.

**16.** Baigčių aibė yra $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, N\}$; čia skaičiumi $i$ žymima baigtis, kad šaulys surinko $i$ taškų, o raide $N$ — kad nepataikė. Tada:
$A = \{7, 8, 9, 10\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, N\}$,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, N\}$,
$A \cap B = \varnothing$,
$A \setminus B = A$,
$B \setminus A = B$,
$\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, N\}$,
$\overline{B} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

**17.** Bandymo baigčių aibė: $\{ab, ac, bc\}$. Įvykių baigčių aibės: $A = \{ab, ac\}$, $B = \{bc\}$, $C = B$, $A \cup B$ yra būtinasis įvykis, $A \cup C$ yra būtinasis įvykis, $B \cup C = \{bc\}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \{bc\}$, $A \setminus B = A$, $A \setminus C = A$, $B \setminus C = \varnothing$, $B \setminus A = B$, $C \setminus B = \varnothing$, $\overline{A} = B$, $\overline{B} = A$, $\overline{C} = A$.

**18.** Bandymo baigčių aibę galima užrašyti, pavyzdžiui, taip:
$\{AJ + BP;\ AJ + CK;\ AJ + DP;\ BP + CK;\ BP + DP;\ CK + DP\}$;
čia, pavyzdžiui, $AJ + BP$ reiškia baigtį, kad dalyvauti olimpiadoje patikėta A. Jonaitytei ir B. Petkutei.
Įvykio $M$ baigčių aibė:
$\{AJ + BP;\ AJ + CK;\ AJ + DP;\ BP + CK;\ BP + DP\}$.
Įvykio $V$ baigčių aibė:
$\{AJ + CK;\ AJ + DP;\ BP + CK;\ BP + DP;\ CK + DP\}$.
Tada:
$M \cup V$ yra būtinasis įvykis,
$M \cap V = \{AJ + CK;\ AJ + DP;\ BP + CK;\ BP + DP\}$,
$M \setminus V = \{AJ + BP\} = \overline{V}$,
$V \setminus M = \{CK + DP\} = \overline{M}$.

**19.** Baigčių aibė yra $\{SSS, SSH, SHS, SHH, HSS, HSH, HHS, HHH\}$; čia, pavyzdžiui, $HSH$ reiškia, kad pirmoji moneta atvirto herbu, antroji — skaičiumi, trečioji — vėl herbu. Tada:
$A_1 = \{SSH, SHS, HSS\}$,
$A_2 = \{SHH, HSH, HHS\}$,
$A_1 \cup A_2 = \{SSH, SHS, HSS, SHH, HSH, HHS\}$,
$A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

**20.** Jei pirmas paimtas rutulys juodas, antras mėlynas, trečias raudonas, tai tokią baigtį galima žymėti, pavyzdžiui, $JMR$; kitas baigtis žymėtume analogiškai. Iš viso yra 24 baigtys. Įvykius baigtimis užrašytume taip:
$A = \{BJM, BJR, BMJ, BMR, BRJ, BRM, JBM, JBR, JMB, JRB, MBJ, MBR, MJB, MRB, RBJ, RBM, RJB, RMB\}$,
$C = \{MJB, MJR, MBJ, MBR, MRJ, MRB, JMB, JMR, JBM, JRM, BMJ, BMR, BJM, BRM, RMJ, RMB, RJM, RBM\}$,
$A \cap C = \{BMJ, BMR, BJM, BRM, JBM, JMB, RBM, RMB, MBJ, MBR, MJB, MJB, MRB\}$,
$A \cup C = \{BJM, BJR, BMJ, BMR, BRJ, BRM, JBM, JBR, JMB, JRB, MBJ, MBR, MJB, MRB, RBJ, RBM, RJB, RMB, MJR, MRJ, JMR, RMJ, JRM, RJM\}$,
$A \backslash C = \{BJR, BRJ, JBR, JRB, RBJ, RJB\}$,
$C \backslash A = \{MJR, MRJ, JMR, JRM, RMJ, RJM\}$,
$\overline{A} = \{JMR, JRM, MJR, MRJ, RJM, RMJ\}$,
$\overline{C} = \{BJR, BRJ, JBR, JRB, RJB, RBJ\}$ .

**21.** Baigtis galima užrašyti tiesiog taip pat, kaip ir sudarytąsias trupmenas. Taigi baigčių aibė yra $\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right\}$.
Tada $A = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right\}$, $B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right\}$, $\overline{A} = \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right\}$, $\overline{B} = \left\{\frac{2}{5}\right\}$,
$A \cap B = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right\}$, $A \cup B$ — būtinasis įvykis, $A \backslash B = \left\{\frac{2}{5}\right\}$, $B \backslash A = \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right\}$.

**22.** Jei pirmasis šaulys pataikė į taikinį, o antrasis nepataikė, tai tokią baigtį žymėsime $PN$; analogiškai žymėsime ir kitas baigtis. Taigi bandymo baigčių aibė yra $\{PP, PN, NP, NN\}$. Tada:
$\overline{A} = \{PP, NN\}$,
$\overline{B} = \{NN, PN, NP\}$,
$A \cup B = \{PP, PN, NP\}$,
$A \cap B = \varnothing$,
$\overline{A} \cup \overline{B} = \{PP, NN, PN, NP\}$,
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{NN\}$.

**23.** Jeigu laimėjo du bilietai, o vienas nelaimėjo, tai tokią baigtį galima užrašyti, pavyzdžiui, taip: $2 + 1$ (arba $(2; 1)$; arba tiesiog laimingų bilietų skaičiumi 2). Tada:
$A = \{1 + 2, 2 + 1, 3 + 0\}$,
$B = \{2 + 1, 3 + 0\}$,
$A \cup B = A$,
$A \cap B = B$,
$A \backslash B = \{1 + 2\}$,
$B \backslash A = \varnothing$,
$\overline{A} = \{0 + 3\}$,
$\overline{B} = \{1 + 2, 0 + 3\}$.

**24.** Susitarkime, kad, pasirinkę du skaičius, gautą skaičių porą užrašysime pirma nurodydami mažesnįjį skaičių.
Tada bandymo baigčių aibė yra $\{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\}$,
$A = \{(1; 3), (2; 4)\}$,
$B = \{(1; 2), (1; 4), (2; 3), (3; 4)\}$,
$\overline{A} = B$,
$\overline{B} = A$,
$A \cup B = \overline{A} \cup \overline{B}$ — būtinasis įvykis.

**25.** Bandymo baigtį galima užrašyti sektorių, kuriuose atsidūrė ratų rodyklės, numerių pora.
Tada bandymo baigčių aibė yra $\{(2; 1), (2; 4), (2; 5), (3; 1), (3; 4), (3; 5), (6; 1), (6; 4), (6; 5)\}$,
$A = \{(2; 1), (3; 1), (6; 1), (6; 4), (6; 5)\}$,
$B = \{(2; 1), (6; 5)\}$.

# 20. ĮVYKIŲ TIKIMYBĖS

## 20.1. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas

Įvykio tikimybės apibrėžimas palankių jam baigčių skaičiaus santykiu su visų baigčių skaičiumi — ne naujiena. Šiame skyrelyje tik labiau nei anksčiau pabrėžiama, kad bandymas su vienodai galimomis baigtimis yra tik matematinė idealizacija. Ar bandymų, kuriuos atliekame tikrovėje, visos baigtys tikrai yra vienodai galimos, niekada nežinome ir negalima žinoti. Tačiau padarius šią prielaidą, dažnai gaunami gerai stebėjimus atitinkantys rezultatai.

***Suvokiame ir žinome:***
vienodai galimų baigčių esmę;
klasikinį įvykio tikimybės apibrėžimą.

***Mokame*** taikyti klasikinį tikimybės apibrėžimą su paprastais bandymais susijusių atsitiktinių įvykių tikimybėms skaičiuoti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šio skyrelio uždaviniai skirti klasikinio tikimybės apibrėžimo taikymui. Ypač svarbu suvokti, kad šiuo būdu apskaičiuoti tikimybę galima tik vienodai galimų baigčių atveju. Analizuojant konkrečius uždavinius su gabesniais mokiniais, būtų pravartu pademonstruoti ir neteisingą rezultatą, t. y. sukurti ne vienodai galimas baigtis ir tuomet apskaičiuoti įvykio tikimybę. Atkreipkime dėmesį į 31 uždavinį — tikimybė, kad $L_1$ „laimės" prieš $L_2$, yra $\frac{4}{9}$, tikimybė, kad $L_2$ „laimės" prieš $L_3$, yra $\frac{4}{9}$. Tačiau tikimybė, kad $L_1$ „laimės" prieš $L_3$, lygi $\frac{5}{9}$. Paradoksas! Iš tikrųjų šis uždavinys vadinamas Kondorsė (prancūzų matematikas M. Condorcet) paradoksu.

**26.** $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(A \setminus B) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(B \setminus A) = \frac{1}{3}$.

**27.** Bandymo baigčių aibėje yra dvylika baigčių. Jas galima užrašyti, pavyzdžiui, raidės ir skaičiaus pora; $S4$ reiškia, kad moneta atvirto skaičiumi, o ant kauliuko — keturios akutės. Nagrinėjamam įvykiui palankios šios baigtys: $H3$, $H4$, $H5$, $H6$, $S1$, $S2$, $S3$, $S4$. Taigi įvykio tikimybė lygi $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

**28.** Iš viso yra 36 vienodai galimos baigtys. Jas galima užrašyti skaičių poromis. Akučių suma lyginė, kai ant abiejų kauliukų atvirsta lyginiai arba nelyginiai akučių skaičiai. Tokių baigčių yra $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$. Taigi įvykio tikimybė lygi $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

**29.** Bandymo baigtys, kaip ir 28 pratime. Labiau tikėtina, kad metus du kauliukus atvirtusių akučių suma bus lygi 7, negu kad 8.

**30.** Bandymo baigtis galima vaizduoti skaičių poromis: pirmasis skaičius yra numeris sektoriaus, kuriame atsidūrė pirmojo rato rodyklė, antrasis — antrojo. Iš viso yra $n = 16$ baigčių.

a) Įvykiui „$L_1$ laimėjo prieš $L_2$" palankios šios baigtys: (4; 2), (4; 3), (5; 2), (5; 3), (7; 2), (7; 3), (7; 6). Taigi tikimybė pirmajam laimėti lygi $\frac{7}{16}$.

b) Tikimybė laimėti vieno arba dviejų taškų skirtumu lygi $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

**31.** Šio bandymo baigtis galima užrašyti skaičių (numerių sektorių, kuriuose sustojo rodyklės) trejetais. Iš viso būtų 27 baigtys. Tačiau nurodytų įvykių tikimybes galima skaičiuoti ir šiek tiek papraščiau.

1) Šiuo atveju trečiasis lošėjas mums visai nerūpi, t. y. jo rezultato galima ir neužrašyti. Tada bandymo baigtį galima užrašyti pirmojo ir antrojo lošėjų sektorių numerių pora. Yra $n = 9$ tokios baigtys. Nesunku nustatyti, kiek yra baigčių su didesniuoju pirmuoju numeriu: $m = 4$. Taigi įvykio tikimybė lygi $\frac{4}{9}$.

2) Kadangi pirmojo ir antrojo lošėjų sektorių numeriai nėra lygūs, tai šios dalies įvykis yra priešingas pirmos dalies įvykiui. Taigi jo tikimybė lygi $\frac{5}{9}$.

3) Samprotauti galima kaip ir sprendžiant 1) pratimą, tik šiuo atveju imame pirmąjį ir trečiąjį lošėjus. Įvykio tikimybė lygi $\frac{5}{9}$.

4) Įvykio tikimybė lygi $\frac{4}{9}$.

5) Įvykio tikimybė lygi $\frac{4}{9}$.

Didžiausios tikimybės yra 2) ir 3) punktų įvykių.

## 20.2. Tikimybių savybės

Šiame skyrelyje remiantis klasikiniu tikimybės apibrėžimu įrodomos kelios svarbios tikimybių savybės, teisingos ir kitais atvejais, t. y. kai tikimybės skaičiuojamos ne pagal klasikinį apibrėžimą.

Pirmoji savybė — apie galimas įvykio tikimybės reikšmes. Negalimojo įvykio tikimybė lygi nuliui, būtinojo — vienetui. Tačiau svarbiausi tikimybių teorijos objektai yra įvykiai, kurių tikimybės yra teigiami, mažesni už vienetą skaičiai.

Antroji savybė — įvykio ir priešingojo jam įvykio tikimybių ryšys. Tai paprasta, tačiau svarbi savybė. Pirmasis skyrelio pavyzdys iliustruoja šios savybės naudą. Verta jį panagrinėti, pabrėžiant, kad neretai būna, jog gana sudėtingo įvykio priešingasis įvykis turi žymiai paprastesnę struktūrą ir nagrinėti jį yra žymiai lengviau. Tai taps dar įtikinamiau, jeigu pirmojo pavyzdžio įvykius panagrinėsite trijų ar daugiau kauliukų metimų atveju.

Nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybės savybė labai svarbi. Verta pabrėžti jos universalų pobūdį. Jeigu tiesėje nagrinėjamos dvi nesikertančios atkarpos, tai jų sąjungos „didumas“, t. y. geometrinis ilgis lygus atkarpų ilgių sumai; jeigu plokštumos figūra padalijama į dvi nesikertančias dalis, tai figūros plotas lygus tų dalių plotų sumai. Galima teigti, kad skaičiuoti įvykių tikimybes — tai irgi reiškia savotiškai „matuoti“ įvykius.

Bet kokių, nebūtinai nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybės formulė taip pat gali būti gretinama su ilgio, ploto ar tūrio skaičiavimo formulėmis. Jos įrodymui paranku naudotis 117 puslapyje pateiktu brėžiniu. Tačiau brėžinys nėra įrodymas. Būtų gerai, kad moksleiviai, paprašyti įrodyti šią formulę, ne tik nubraižytų tą paprastą diagramą, bet mokėtų teisingai ja remdamiesi samprotauti. Iš esmės ši diagrama tėra samprotavimų vizualizavimo priemonė.

***Suvokiame ir žinome:***
priešingojo įvykio tikimybės formulę;
įvykių sąjungos tikimybės formulę.

***Mokame*** taikyti priešingojo įvykio bei įvykių sąjungos tikimybės formules sprendžiant uždavinius.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Tikimybių savybių dėka, žinant vienų įvykių tikimybes, galima apskaičiuoti kitų, paprastai sudėtingesnių, įvykių tikimybes. 32 ir 33 uždaviniai parodo priešingojo įvykio tikimybės formulės naudingumą. Nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybės skaičiavimą iliustruoja 34 ir 35 uždaviniai. 36 uždavinyje siūloma apskaičiuoti įvykių sąjungos tikimybę pagal formulę, tinkančią bet kuriems įvykiams.

**32.** 1) $\mathbf{P}(A) = \frac{7}{16}$; 2) $\mathbf{P}(A) = 1 - \frac{3\cdot 3}{16} = \frac{7}{16}$.

**33.** 2) $\mathbf{P}(A) = 1 - \frac{1\cdot 1\cdot 1}{8} = \frac{7}{8}$.

**34.** Jei $A$ yra įvykis, kad ištrauktas mėlynas rutuliukas, o $B$ — kad žalias, tai šie įvykiai yra nesutaikomi ir $\mathbf{P}(A) = \frac{4}{10}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{10}$.
Tada $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

**35.** Įvykis $A \cup B$ reiškia, kad atsivertė viena, dvi arba penkios akutės. Tokio įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{2}$.

**36.** Iš kiekvienos dėžutės traukiama po vieną rutulį. Baigtį galima užrašyti skaičių pora $(i; j)$; čia $i$ yra pirmos dėžutės rutulio numeris, $j$ — antros. Galima susitarti, kad pirmos dėžutės baltas rutulys pažymėtas numeriu 1, o antros dėžutės baltieji rutuliai — 1 ir 2.
a) Taigi iš viso yra devynios bandymo baigtys:
$(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), \ldots, (3; 3)$.
b) Įvykis $A$ reiškia, kad iš pirmos dėžutės ištrauktas baltas rutulys, $B$ — kad iš antros dėžutės ištrauktas baltas rutulys. Tada įvykiui $A$ yra palankios trys baigtys $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(1; 3)$; $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$. Analogiškai gauname, kad įvykiui $B$ yra šešios palankios baigtys; $\mathbf{P}(B) = \frac{2}{3}$.
c) Įvykiui $A \cap B$ yra dvi palankios baigtys $(1; 1)$, $(1; 2)$. Taigi $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{9}$.
d) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{7}{9}$.

Žinome, kaip skaičiuoti įvykio tikimybę: reikia rasti palankių įvykiui baigčių santykį su visų bandymo baigčių skaičiumi. Tačiau kaip rasti tuos baigčių skaičius? Kadangi bandymai būna labai įvairūs, tai ir vieno recepto visiems atvejams duoti negalima. Tačiau paprastai baigtys, kurias skaičiuojame, turi savo struktūrą, kurios savybes panaudojame skaičiuodami. Baigtys dažnai vaizduojamos tam tikrų elementų rinkiniais (pavyzdžiui, natūralieji skaičiai užrašomi skaitmenų rinkiniais, žodžiai yra raidžių rinkiniai ir t. t.). Kombinatorika pateikia tam tikras bendras taisykles įvairiems rinkiniams skaičiuoti.

Viena svarbiausių kombinatorikos taisyklių — daugybos taisyklė. Trumpai suformuluota vienu sakiniu ji gali būti suvokta pernelyg formaliai. Galbūt verta pabraižyti nesudėtingą brėžinį, vaizduojantį, kaip tos poros yra skaičiuojamos, kodėl porų skaičius tikrai lygus elementų skaičių aibėse sandaugai.

Iš daugybos taisyklės išplaukia kone visos mokykloje naudojamos kombinatorikos žinios. Žinoma, jeigu šia taisykle naudojamasi išradingai. Išsiaiškinus daugybos taisyklę tuo atveju, kai pirmasis ir antrasis elementas renkami iš skirtingų, galima sakyti, tarpusavyje nesusijusių aibių, reikia pastebėti, kad ji lieka teisinga, kai antrasis elementas renkamas iš tos pačios aibės kaip ir pirmasis, tik „sumažintos" išbraukus jau pasirinktąjį elementą. Šitaip gauname $k$ elementų iš $n$ gretinių formulę ir, kaip atskirą atvejį, $n$ elementų kėlinių formulę. Lieka derinių formulė. Verta gerai panagrinėti ketvirtą pavyzdį. Iš esmės jis iliustruoja bendrąjį $k$ elementų iš $n$ derinių formulės įrodymą.

Tiesa, galima pastebėti, kad šiame pavyzdyje apskaičiuotą 3 elementų iš 4 derinių skaičių galima apskaičiuoti ir greičiau. Kad gautume tokį derinį, reikia iš keturių elementų aibės išbraukti vieną elementą. Keliais būdais tai galima padaryti? Keturiais. Taigi $C_4^3 = C_4^1 = 4$. Galima pateikti ir daugiau tokių sąryšių, pavyzdžiui, $C_{10}^8 = C_{10}^2$, artėjant prie minties apie bendru atveju teisingą formulę $C_n^m = C_n^{n-m}$.

***Suvokiame ir žinome:***

gretinio sąvoką;
derinio sąvoką;
daugybos taisyklę;
kaip remiantis daugybos taisykle išvedama gretinių, o taip pat ir derinių, formulės.

***Mokame:***

atpažinti gretinius;
atpažinti derinius;
taikyti formules gretinių bei derinių kiekiams surasti.

## PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Kombinatorika — plati matematikos šaka, apimanti ir įvairių rinkinių kiekių skaičiavimo taisykles. Kai baigtys vienodai galimos, tai skaičiuojant, kiek jų yra iš viso ir kiek iš jų palankios nagrinėjamam įvykiui, kartais praverčia kombinatorikos formulės. Nėra blogai, kad dauguma šio skyrelio uždavinių gali būti išspręsti ir be tokių formulių. Tuomet atsiranda galimybė dar kartą paaiškinti kombinatorikos formulių prasmę. Uždavinių čia nemažai, todėl kai kuriuos, trūkstant laiko, galima ir praleisti.

**37.** *Nurodymas.* Prieš skaičiuojant tikimybes, verta žodžiais nusakyti nurodytus įvykius. Tada suskaičiuoti tikimybes bus visai lengva.
1) $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$; 2) $\mathbf{P}(B) = \frac{19}{30}$;
3) $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{7}{30}$, $\mathbf{P}(\overline{A} \cap B) = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$, $\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$,
$\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

**38.** Bandymo baigtis — eilė iš trijų skaitmenų, kurių kiekvienas renkamas iš 10 skaitmenų. Taigi $n = 30$. Tik viena skaitmenų eilė reiškia sėkmę. Taigi įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{30}$.

**39.** Tikimybė, kad lagaminas bus sėkmingai atidarytas, lygi $\frac{1}{26 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{702}$.

**40.** Bandymo baigtį galima užrašyti eile trijų skaitmenų, iš kurių nei vienas nelygus nuliui. Taigi baigčių skaičius $n = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Tikimybė įspėti numerį lygi $\frac{1}{729}$.

**41.** Bandymo baigtis — septynių kortelių, parinktų iš dešimties, eilė. Taigi yra tiek baigčių, kiek yra septynių elementų iš dešimties gretinių:
$n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800$. Tikimybė sudėti žodį lygi $\frac{1}{604800}$.

**42.** Baigčių yra tiek, kiek yra trijų elementų iš šešių gretinių, o palanki tik viena baigtis. Taigi įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{120}$.

**43.** Bandymo baigčių yra tiek, kiek yra kėlinių iš devynių elementų, o palanki įvykiui tėra viena baigtis. Taigi įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{362880}$.

**44.** Įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{24}$.

**45.** Apskaičiuokime bandymo baigčių, t. y. septynženklių numerių, turinčių nurodytą savybę, skaičių. Jį galima surasti šitaip. Įsivaizduokime, kad į kol kas tuščias septynias vietas reikia įrašyti skaitmenis. Pirmiausiai parinkime vietas vienetams — tai galima padaryti $C_7^3 = 35$ būdais. Iš likusių keturių vietų reikia parinkti dvi ir įrašyti į jas skaitmenį 3 — tai galima padaryti $C_4^2 = 6$ būdais. Liko dvi vietos, į kurias reikia įrašyti 5. Taigi iš viso galima sudaryti $n = 35 \cdot 6 = 210$ numerių, ir tik vienas iš jų teisingas. Taigi įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{210}$.

**46.** Trumpam įsivaizduokime, kad visos trys kortelės su raidėmis $A$ yra skirtingos, pavyzdžiui, jos parašytos skirtingomis spalvomis. Taip pat įsivaizduokime, kad kortelės su raidėmis $M$ ir kortelės su raidėmis $T$ taip pat skirtingos. Tada bandymo baigčių yra tiek, kiek yra būdų dešimt kortelių išrikiuoti į eilę, t. y. $n = 10!$. Kad gautume žodį MATEMATIKA, raidės E, I, K būtinai turi būti savo vietose, t. y. ketvirtoje, aštuntoje ir devintoje. Trys „spalvotos" raidės A turi būti antroje, šeštoje ir dešimtoje vietose. Jas į šias vietas galima patalpinti 3! būdais. Analogiškai raides M ir T — 2! būdais. Taigi iš viso yra $m = 3! \cdot 2! \cdot 2!$ būdų išrikiuoti raides, kad jos sudarytų žodį MATEMATIKA. Įvykio tikimybė lygi $\frac{3! \cdot 2! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{151\,200}$.

**47.** Bandymo baigčių yra tiek, kiek yra būdų išrikiuoti aštuonis elementus į eilę, t. y. $n = 8!$. Skaičiuokime, kiek yra būdų sustatyti knygas į eilę taip, kad matematikos knygos būtų greta. Pasiūlykime pirmiausiai parinkti vietas matematikos knygoms, pavyzdžiui, dvi pirmąsias. Keliais būdais matematikos knygas galima sustatyti į šias joms skirtas vietas? Dviem būdais. Keliais būdais galima sustatyti likusias šešias knygas į joms likusias šešias vietas? Būdų yra $n = 6!$. Taigi paskyrę matematikos knygoms vietas, iš karto gauname $2 \cdot 6!$ eilių. Belieka nustatyti, kelias būdais matematikos knygoms galima „rezervuoti" vietas — septyniais. Taigi įvykio tikimybė lygi $\frac{7 \cdot 2 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{4}$.
Galimos įvairios šio uždavinio formuluotės: kokia tikimybė, kad žmonėms atsitiktinai sustojus į eilę, pažįstami atsidurs greta ir t. t.

**48.** Baigčių skaičius $n = C_{16}^5$. Palankių baigčių skaičių surasime remdamiesi daugybos taisykle: $n = C_{10}^3 \cdot C_6^2$. Įvykio tikimybė lygi $\frac{C_{10}^3 \cdot C_6^2}{C_{16}^5} = \frac{75}{182}$.

**49.** Tai 48 uždavinio apibendrinimas. Įvykio tikimybė lygi $\frac{C_m^r \cdot C_{n-m}^{k-r}}{C_n^k}$.

**50.** Tris atkarpas iš keturių galima parinkti $n = 4$ būdais. Tik dviem atvejais (kai parenkamos atkarpos, kurių ilgiai yra 2, 5, 6 arba 5, 6, 10) trikampio nelygybė yra patenkinta. Taigi įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{2}$.

## 20.4. Bendrasis įvykio tikimybės apibrėžimas

Jau minėjome, kad laikydami, jog realaus bandymo baigtys yra vienodai galimos, idealizuojame bandymą. Iš tiesų niekada negalima žinoti, ar realaus bandymo visos baigtys yra vienodai galimos.

Kartais bandymas su nevienodai galimomis baigtimis gaunamas kitaip „pažvelgus" į bandymą su vienodai galimomis baigtimis, t. y. nusprendus kitaip fiksuoti tai, kas bandyme įvyko. Pavyzdžiui, jeigu metus kauliuką mums rūpi, ar atvirtusių akučių skaičius pirminis, ar sudėtinis, ar lygus vienetui, gauname bandymą su trimis nevienodai galimomis baigtimis. Šių baigčių tikimybės apskaičiuojamos tokio bandymo „fone" įžvelgus bandymą su vienodai galimomis baigtimis. Analogiškai randamos ir pirmo pavyzdžio bandymo baigčių tikimybės. Kartais baigčių tikimybės randamos remiantis kitais samprotavimais, kaip antrame pavyzdyje.

Palankios įvykiui baigtys yra tarsi jį sudarančios „plytelės". Todėl ir įvykio tikimybės apibrėžimas sumuojant jį sudarančių baigčių tikimybes turėtų atrodyti visai natūralus. Skyrelyje parodyta, kad į klasikinį įvykio tikimybės apibrėžimą irgi galima žvelgti kaip į atskirą bendrojo apibrėžimo atvejį.

Rodos, tiek nedaug pakeitėme: pažvelgėme į santykį $\frac{m}{n}$ kaip į dėmenų $\frac{1}{n}$ sumą, tačiau šis požiūris atvėrė galimybę skaičiuoti įvykių tikimybes įvairiausiais atvejais. Tačiau lieka viena svarbi problema: kaip gi surasti mums rūpimo bandymo su nevienodai galimomis baigtimis baigčių tikimybes? Iškėlus šį klausimą, verta padaryti „teatrališką" pauzę, kad būtų geriau įsisąmoninta problemos svarba ir sunkumas. Galbūt net verta paraginti pasamprotauti, iš kur gi tas tikimybes gauti? Atsakymas tik toks — iš pastangomis įgytos patirties. Realaus bandymo baigčių tikimybių niekada nesužinosime, tačiau atlikus daugybę vienodų, nepriklausomų vienas nuo kito bandymų ir apskaičiavus baigčių statistinius dažnius, galima sužinoti tų nežinomų tikimybių apytiksles reikšmes. Galbūt kam nors iškils abejonių, ar nebūsime apvilti? Ar negali būti taip, kad, tarkime, atlikus daugybę bandymų, sugaišus marias laiko, gausime reikšmes, daug besiskiriančias nuo baigčių tikimybių? Kad už pastangas bus atlyginta, garantuoja didžiųjų skaičių dėsnis, vienas svarbiausių tikimybių teorijos dėsnių, nagrinėjamų išsamesniuose tikimybių teorijos kursuose.

Padėtis su baigčių tikimybėmis šiek tiek primena mūsų santykį su iracionaliaisiais skaičiais. Jų tikslių reikšmių (dešimtainių išraiškų) irgi niekada negalima žinoti, tačiau pakankamai ilgai padirbėjus, galima rasti apytiksles reikšmes, kurios skiriasi nuo iracionaliųjų skaičių reikšmių labai mažai. Tačiau yra ir vienas skirtumas. Vienais dešimtukais visus mokyklos metus besimokęs moksleivis vis dėlto gali neišlaikyti egzamino (nors tai pasitaiko itin retai); lygiai taip pat labai retai gali pasitaikyti, kad statistiniai dažniai, gauti iš didelio bandymų skaičiaus, skirsis nuo baigčių tikimybių gana daug. Tačiau kaip sako kiek ironiška išmintis: „išimtis patvirtina taisyklę".

***Suvokiame ir žinome:***

bendrąjį įvykio tikimybės apibrėžimą;

įvykių savybes;

kaip bendrasis įvykio tikimybės apibrėžimas gali būti praktiškai taikomas.

***Mokame*** remtis tikimybių savybėmis reiškiant vienų įvykių tikimybes kitų įvykių tikimybėmis.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Pateiktuose uždaviniuose sudarius baigčių aibę neįžiūrėtume, kad baigtys vienodai galimos. Tad čia pateiktų uždavinių tikimybes galima apskaičiuoti tik remiantis bendruoju tikimybės apibrėžimu arba įvykių sąjungos formule (kuri galioja ir šiuo atveju). Atkreipkime dėmesį į 56 uždavinį, kuris yra labiau teorinio pobūdžio. 57 ir 58 uždaviniai priartina tikimybių teoriją prie gyvenimo. Čia vietoj tikimybių operuojama įvykių santykiniais dažniais — taip dažniausiai ir daroma tiriant gyvenimiškus reiškinius.

**51.** a) Jeigu $A$ yra įvykis, kad prekių parduota ne daugiau kaip už 1000 Lt, o $B$ — kad prekių parduota daugiau kaip už 1000 Lt, bet mažiau kaip už 2000 Lt, tai reikia apskaičiuoti įvykio $\overline{A \cup B}$ tikimybę. Ji lygi $1 - 0{,}3 - 0{,}4 = 0{,}3$.
b) Įvykio tikimybė $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$.

**52.** a) $0{,}1$; b) $0{,}15 + 0{,}45 + 0{,}1 = 0{,}7$; c) $1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

**53.** a) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

**54.** Jeigu $A$ yra įvykis, kad atpigs pirmosios įmonės akcijos, o $B$ — kad atpigs antrosios įmonės akcijos, tai įvykis, kad atpigs bent vienos iš įmonių akcijos, yra $A \cup B$. Šio įvykio tikimybė
$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}6$.

**55.** Jeigu $A$ yra įvykis, kad pabrangs pirmosios įmonės akcijos, o $B$ — kad pabrangs antrosios įmonės akcijos, tai įvykis, kad pabrangs bent vienos iš įmonių akcijos, yra $A \cup B$, o įvykis, kad pabrangs abiejų įmonių akcijos, yra $A \cap B$. Taigi $\mathbf{P}(A) = 0{,}25$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}55$, $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}7$. Tada

$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}55 - 0{,}7 = 0{,}1.$

**56.** a) Įvykis $A \cap B$ gali neturėti nei vienos palankios baigties, kita vertus, visos jam palankios baigtys yra ir įvykiui $A$, ir įvykiui $B$ palankios baigtys. Taigi $0 \leqslant \mathbf{P}(A \cap B) \leqslant \mathbf{P}(A) = 0{,}6$; $0 \leqslant \mathbf{P}(A \cap B) \leqslant \mathbf{P}(B) = 0{,}7$. Vadinasi, galima tvirtinti, kad $\mathbf{P}(A \cap B)$ yra intervalo $[0; 0{,}6]$ skaičius.

b) Iš lygybės $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ gauname, kad $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(A \cup B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 1{,}3$; $\mathbf{P}(B) \leqslant \mathbf{P}(A \cup B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$. Taigi $\mathbf{P}(A \cup B)$ yra intervalo $[0{,}7; 1]$ skaičius.

**57.** Pažymėkime $A$ įvykį, kad atsitiktinis pirkėjas pirks mėsos produktus, $B$ — kad atsitiktinis pirkėjas pirks žuvies produktus. Iš uždavinio sąlygos: $\mathbf{P}(A) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}7$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}4$. Reikia apskaičiuoti $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$. Panagrinėję įvykių $A$ ir $B$ Veno diagramas įsitikinkime, kad $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Taigi $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B) = 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \cap B) = 1 - 0{,}5 - 0{,}7 + 0{,}4 = 0{,}2.$

**58.** Pažymėkime $A$ įvykį, kad atsitiktinis poilsiautojas atostogauja Lietuvos pajūryje, o $B$ — užsienyje. Tada $\mathbf{P}(A) = 0{,}8$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}15$. Kaip ir 57 uždavinyje, reikia apskaičiuoti $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$. Skaičiuodami analogiškai, gauname $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}8 - 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}05.$

# 21. SĄLYGINĖ TIKIMYBĖ

## 21.1. Sąlyginės tikimybės apibrėžimas

Sąlyginę tikimybę formaliai lengva įvesti, tačiau kartais atsiranda sąlyginės tikimybės interpretacijos sunkumų. Įvykių tikimybės, kurias skaičiavome anksčiau, yra besąlyginės, t. y. jos skaičiuojamos nesinaudojant jokia informacija apie bandyme įvykusius įvykius. Šias tikimybes galima apskaičiuoti dar prieš bandymą.

Tarkime, bandymas jau prasidėjo. Ar įvyks rūpimas įvykis $A$ dar nežinoma, tačiau jau žinoma, kad įvyko įvykis $B$. Tada iškart galima į tai reaguoti: atsižvelgiant į tai, kad bandymas gali baigtis tik tomis baigtimis, kurios palankios įvykiui $B$ ir iš naujo suskaičiuoti įvykio $A$ tikimybę. Ši naujai apskaičiuota tikimybė tikriausiai yra skirtinga nuo prieš bandymą apskaičiuotosios; kadangi ji apskaičiuota su sąlyga, kad įvyko įvykis $B$, ji vadinama įvykio $A$ sąlygine tikimybe su sąlyga, kad įvyko įvykis $B$. Iš esmės tai teisinga sąlyginės tikimybės interpretacija, duodanti ir būdą jai apskaičiuoti, nesiremiant apibrėžimu. Tačiau ji kartu tarsi remiasi prielaida, kad tam, kad galėtume skaičiuoti sąlyginę tikimybę, sąlygos įvykis turi įvykti pirmiau. Kartais tai tiesiog neįmanoma. Pavyzdžiui, pirmame pavyzdyje Algis traukia rutulį iš urnos pirmas, o Birutė antra. Jeigu ištraukę rutulius jie iškart juos parodo, tai neįmanoma apie įvykį $B = \{\text{Birutė laimėjo}\}$ sužinoti anksčiau negu apie įvykį $A = \{\text{Algis laimėjo}\}$. Kokia tada įvykio $A$ sąlyginės tikimybės su sąlyga, kad įvyko įvykis $B$, prasmė?

Tačiau jeigu tokie klausimai nekyla natūraliai, neverta jų skatinti. Atsakymai atsiras palaipsniui, įgijus daugiau sąvokos naudojimo patirties.

Gali kilti klausimas, kam reikalingas sąlyginės tikimybės apibrėžimas besąlyginių tikimybių santykiu, jei „ir taip viskas aišku“. Galima atsakyti kad ir taip: sąlyginės tikimybės apibrėžimas reikalingas? — reikalingas. Ar apibrėžimas besąlyginių tikimybių santykiu yra trumpas ir aiškus? — tikriausiai. Pabandykime suformuluoti geresnį (trumpesnį, aiškesnį...) apibrėžimą nesiremdami besąlyginėmis tikimybėmis... Kažin ar pavyks.

***Suvokiame ir žinome:***
sąlyginės tikimybės prasmę;
sąlyginės tikimybės apibrėžimą.

***Mokame*** skaičiuoti sąlygines tikimybes paprastais atvejais remdamiesi apibrėžimu arba be jo.

### PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Iki šiol nagrinėjome mus dominančius įvykius (skaičiavome jų tikimybes) nesiedami jų su kitais įvykiais. Tačiau gyvenime dažnai šitokie ryšiai tarp įvykių egzistuoja. Vienas iš būdų šį sąryšį įvertinti — tai apskaičiuoti sąlyginę tikimybę įvykti įvykiui su sąlyga, kad kitas įvykis įvyko. Pirmieji trys uždaviniai (59–61) padeda išsiaiškinti sąlyginės tikimybės sąvoką. Paskutinieji trys (62–64) skirti priklausomų įvykių sankirtos tikimybei apskaičiuoti.

**59.** Kadangi išimtas rutulys yra baltas, tai urnoje liko 4 balti ir 8 juodi rutuliai. Tikimybes skaičiuojame pagal klasikinį įvykio tikimybės apibrėžimą.
a) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

**60.** Tikimybę skaičiuojame pagal klasikinį įvykio tikimybės apibrėžimą, remdamiesi tuo, kad liko 12 bilietų ir iš jų 2 tie, kurių moksleivis neišmoko.
Įvykio tikimybė lygi $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

**61.** Kadangi akučių suma didesnė už 9, tai galimos tokios baigtys: $(4; 6)$, $(5; 5)$, $(5; 6)$, $(6; 4)$, $(6; 5)$ ir $(6; 6)$. Tikimybė, kad bent vieno kauliuko atsivers 5 akutės, lygi $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

**62.** Remdamiesi nurodyta formule gausime, kad debesuotos ir lietingos dienos tikimybė lygi: $0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35$.

**63.** Tikimybę skaičiuojame taip pat, kaip 62 uždavinyje: $0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}08$.

**64.** Tikimybę skaičiuojame taip pat, kaip 62 uždavinyje: $0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$.

## 21.2. Nepriklausomi įvykiai

Aptarus sąlyginės tikimybės sąvoką, nepriklausomus įvykius $A$, $B$ iš pradžių natūralu nusakyti lygybėmis: $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$, o po to pereiti prie įprastinio apibrėžimo. Žodžiais lygybes galima pakomentuoti kad ir taip: sužinojus, kad įvyko vienas iš įvykių, mes negauname daugiau informacijos apie kitą įvykį, nei turėjome iš pradžių.

Kodėl įprastinis apibrėžimas patogesnis? Yra kelios priežastys. Visų pirma, apibrėžimas, kuriame panaudota viena sąlyga (viena lygybė) yra trumpesnis. Kita vertus, ar, pavyzdžiui, negalimąjį ir bet kokį kitą įvykį natūralu vadinti nepriklausomais? Kiek pasvarstę prieitume išvados, jog taip. Tačiau kai $B$ yra negalimasis įvykis, t. y. $\mathbf{P}(B) = 0$, tikimybės $\mathbf{P}(A|B)$ iš viso negalima nagrinėti.

Nepriklausomų įvykių apibrėžimu mes dažniau naudojamės ne norėdami patikrinti, ar du mums rūpimi įvykiai yra nepriklausomi, bet padarę jų nepriklausomumo prielaidą ir skaičiuodami tikimybę, kad jie įvyks kartu. Galima taip pat paminėti, kad jei įvykiai $A$ ir $B$ nepriklausomi tai taip pat nepriklausomi įvykiai: $\overline{A}$ ir $B$; $A$ ir $\overline{B}$; $\overline{A}$ ir $\overline{B}$.

***Suvokiame ir žinome:***

nepriklausomų įvykių sąvokos esmę;

nepriklausomų įvykių sąvokos apibrėžimą.

***Mokame*** remtis įvykių nepriklausomumo sąvoka skaičiuojant įvykių tikimybes.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Kai žinoma (arba daroma prielaida), kad įvykiai $A$ ir $B$ yra nepriklausomi, tai sudauginus įvykių $A$ ir $B$ tikimybes, gaunama šių įvykių sankirtos tikimybė. Tokias tikimybes ir reikia apskaičiuoti 65 ir 66 uždaviniuose. Kai jau mokame apskaičiuoti nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybę, galima rasti jų sąjungos (67 ir 68 uždaviniai) bei kitokių įvykių (69–71) tikimybes.

**65.** Įvykiai, susiję su kauliuko metimu, nepriklauso nuo įvykių, susijusių su monetos metimu. Taigi remdamiesi įvykių nepriklausomumu gauname, kad tikimybė, kad moneta atvirs herbu, o kauliukas — nelyginiu akučių skaičiumi, lygi $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$.

**66.** Tegu $A$ reiškia įvykį, kad rėmas turės defektą, o $B$ — kad stiklas bus brokuotas. Šie įvykiai, pagal sąlygą, yra nepriklausomi, jiems priešingieji įvykiai — taip pat. Taigi $\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}) = (1 - 0{,}05) \cdot (1 - 0{,}04) = 0{,}912$.

**67.** Tegu $A$ reiškia įvykį, kad laimės pirmosios loterijos bilietas, o $B$ — kad laimės antrosios loterijos bilietas. Tada $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}01 + 0{,}02 - 0{,}01 \cdot 0{,}02 = 0{,}0298$.

**68.** Tikimybę skaičiuojame taip pat, kaip ir 67 uždavinyje: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

**69.** a) $0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$; b) $(1 - 0{,}9) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}02$; c) $0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}98$; d) $0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}26$.

**70.** a) $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$; b) $(1 - 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}1) = 0{,}81$; c) $0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}18$; d) $0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}19$.

**71.** a) $0{,}9 \cdot 0{,}95 = 0{,}855$; b) $0{,}9 \cdot 0{,}95 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}995$; c) $0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}05 = 0{,}14$; d) $0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}005$.

# 22. KARTOJIMO UŽDAVINIAI

**1.** 36.

**2.** Galima samprotauti taip: bet kurį kelią iš taško $A$ į tašką $B$ sudaro šešios atkarpos: trys iš jų vertikalios, trys horizontalios. Bet kuris kelias, prasidedantis taške $A$ ir sudarytas iš trijų horizontalių ir trijų vertikalių atkarpų, nuves į tašką $B$. Tokius kelius galima žymėti, pavyzdžiui, taip: $HHVHVV$. Taigi kelių bus tiek, kiek yra skirtingų žodžių iš šešių raidžių: trys raidės turi būti $H$, o likusios — $V$. Taigi kelių skaičius yra $C_6^3 = 20$. Akivaizdu, kad šį uždavinį galima lygiai taip pat išspręsti su bet kokiu horizontalių ir vertikalių linijų skaičiumi.

**3.** $\frac{1}{16}$.

**4.** Apklausę penkis moksleivius ir surašę jų gimtadienių mėnesių numerius, gausime bandymo baigtį. Iš viso yra $n = 12^5$ bandymo baigčių. Geriausia skaičiuoti, kiek yra palankių baigčių priešingajam įvykiui, t. y. kad visi moksleiviai gimę skirtingais mėnesiais. Tokių baigčių yra $m = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$. Taigi tikimybė, kad atsiras bent du moksleiviai, gimę tą patį mėnesį, lygi $1 - \frac{m}{n} = \frac{89}{144}$.

**5.** $\frac{1}{2}$.

**6.** a) 0,4; b) 0,6; c) 0,2.
*Pastaba.* Reikėtų papildyti sąlygą, kad laimi tas lošėjas, kurio rato rodyklė, ratui sustojus, atsiduria didesniu numeriu pažymėtame sektoriuje.

**7.** Pasirinkti keturis taškus ir juos sužymėti raidėmis $A$, $B$, $C$, $D$ galima $n = C_7^4 \cdot 4!$ skirtingais būdais. Jeigu keturis taškus jau pasirinkome, tai juos sužymėti taip, kad $AB$ ir $CD$ kirstųsi, galima $4 \cdot 2$ būdais. Iš tikrųjų, raide $A$ galima pažymėti bet kurį iš pasirinktųjų taškų, tačiau tada raide $B$ galima pažymėti tik vieną iš likusių trijų taškų, raide $C$ — bet kurį iš likusių dviejų taškų, o raidei $D$ lieka tik vienas taškas. Taigi parinkti ir pažymėti keturis taškus taip, kad stygos $AB$ ir $CD$ kirstųsi, yra $m = C_7^4 \cdot 4 \cdot 2$ būdų. Tokio įvykio tikimybė lygi $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$.

**8.** 0,4. *Pastaba.* Atkreipkite moksleivių dėmesį, kad skaitmenys skaičiuje gali kartotis. Kadangi sąlygoje tai nėra paminėta, nereikėtų laikyti klaida, jei uždavinys bus išspręstas laikant, kad skaitmenys skaičiuje nesikartoja.

**9.** 1) $\frac{C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{15}{91}$; 2) $\mathbf{P}(A) = \frac{43}{91}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{48}{91}$.
*Pastaba.* Sąlygoje yra korektūros klaida. Turėtų būti: „2) Apskaičiuokite įvykių ... tikimybes“.

**10.** $\frac{4 \cdot 3! \cdot 2!}{5!} = 0{,}4$.

**11.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$.

**12.** a) 0,1; b) 0,5.

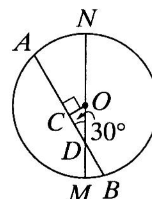
**13.** *Nurodymas.* Iš atkarpų, kurių ilgiai yra $a, b, c$, galima sudėti trikampį tada ir tik tada, kai visos nelygybės $a < b+c, b < a+c, c < a+b$ yra teisingos (arba kai trumpesniųjų kraštinių suma didesnė už trečiąją). Tikrinti, ar trikampis yra smailusis, statusis ar bukasis, galima remiantis kosinusų teorema. Pavyzdžiui, kampo prieš kraštinę $c$ kosinusas $\cos\gamma = \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}$. (Todėl užtenka patikrinti, ar ilgiausios kraštinės kvadratas mažesnis, lygus ar didesnis už kitų dviejų kraštinių kvadratų sumą.)
*Atsakymas.* a) 0,7; b) 0,2; c) 0,5; d) $\frac{5}{7}$.

**14.** 1) a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{3}{8}$; d) $\frac{1}{8}$; e) $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{3}{7}$.

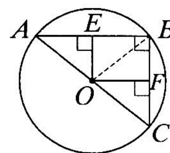
**15.** a) 0,72; b) 0,98; c) 0,02.

**16.** a) 0,28.

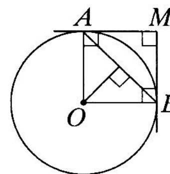
**17.** Tegu styga $AB$ ir skersmuo $MN$ kertasi taške $D$ ir $MD = 5\,\text{cm}$, $DN = 13\,\text{cm}$. Tada $MN = 5 + 13 = 18\,(\text{cm})$, $MO = ON = 18 : 2 = 9\,(\text{cm})$, $DO = 9 - 5 = 4\,(\text{cm})$. Brėžiame $OC \perp AB$; $OC = \frac{1}{2}DO = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\,(\text{cm})$.



**18.** $OEBF$ — stačiakampis, todėl $OE = FB$. Trikampis $BOC$ — lygiašonis, todėl $BF = FC$. Tada $BC = 2BF = 2 \cdot 6 = 12$ (cm).
Analogiškai $AB = 2 \cdot 8 = 16$ (cm).
Trikampis $ABC$ — statusis, todėl $AC = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ (cm).
$P = 12 + 16 + 20 = 48$ (cm), $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ (cm$^2$).
*Pastaba.* Vadovėlyje pateiktas atsakymas neteisingas. Turi būti 48 cm ir 96 cm$^2$.

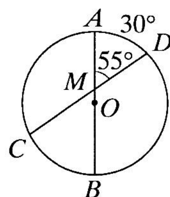



**19.** $AM = MB$ (apskritimo liestinių, išeinančių iš vieno taško, atkarpų savybė), $AM \perp MB$ (duota), $OA \perp MA$ ir $OB \perp MB$ (apskritimo liestinės savybė), $OA = OB$ (apskritimo spinduliai). Taigi keturkampis $OAMB$ yra kvadratas. Todėl atstumas nuo apskritimo centro iki stygos lygus $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (cm).

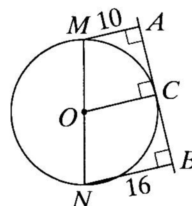



**20.** $\smile AMB = \frac{360° \cdot 7}{18} = 140°$, $\smile ANB = \frac{360° \cdot 11}{18} = 220°$.
Įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į šiuos lankus, atitinkamai lygūs 70° ir 110°.

**21.** Kadangi $\smile AD = 30°$, tai $\angle AOD = 30°$.
Tada $\angle OCD = \angle ODC = 55° - 30° = 25°$, $\angle COD = 180° - 2 \cdot 25° = 130°$, $\angle COA = \angle COD - \angle AOD = 130° - 30° = 100°$. Vadinasi, $\smile AC = 100°$.

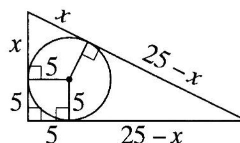



**22.** $OC$ yra trapecijos $ABNM$ vidurinė linija, todėl
$OC = \frac{1}{2}(10 + 16) = 13$ (cm). Tada $MN = 2OC = 2 \cdot 13 = 26$ (cm).




**23.** $\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \cdot 65° = 130°$;
$\angle OAC = \angle OCA = (180° - 130°) : 2 = 25°$.

**24.** Lietimosi taškas dalija įžambinę į dalis $x$ cm ir $(25 - x)$ cm.
Tada $P = 2(x + 25 - x + 5) = 60$ (cm).




**25.** $AMNC$ — lygiašonė trapecija, $OM = ON$. Tada $BM + ON = BN + OM$. Vadinasi, į keturkampį $BMON$ galima įbrėžti apskritimą.

**26.** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° + 1 \cdot 1 \cdot \cos 120° = 3 \cos 120° = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1{,}5$.

**27.** a) $\vec{m} \cdot \vec{n} = -1 \cdot 4 + 1{,}8 \cdot 5 = 5$;
b) $\vec{m} \cdot \vec{n} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -2 - 6\sqrt{2}$;
c) $\vec{m} \cdot \vec{n} = -3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = -\sqrt{3}$;
d) $\vec{m} \cdot \vec{n} = -1 \cdot 4 - 2 \cdot (-2{,}5) = 1$.

**28.** a) *I būdas.* $(2\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 4\vec{j}) = -2\vec{i}^2 + 3\vec{i} \cdot \vec{j} + 8\vec{i} \cdot \vec{j} - 12\vec{j}^2 = -2 + 11\vec{i} \cdot \vec{j} - 12 = -14 + 11 \cdot \cos 90° = -14$.
*II būdas.* $(2\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 4\vec{j}) = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 4 = -14$.
b) 16.

**29.** $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0$; $\cos\alpha = \frac{0}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0$, $\alpha = 90°$;
b) $\cos\alpha = \frac{-1 \cdot 1 - 3 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = -1$, $\alpha = 180°$;
c) $\cos\alpha = \frac{0 \cdot 1 + (-1)(-\sqrt{3})}{\sqrt{0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 30°$;
d) $\cos\alpha = \frac{-4 \cdot 3\sqrt{3} + 3 \cdot 0}{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 150°$.

**30.** a) Raskime kampą tarp vektoriaus $\vec{a}$ ir vienetinio $Ox$ ašies vektoriaus $\vec{i}$:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot 1 + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2}} = -\frac{1}{2},\ (\widehat{\vec{a},\vec{i}}) = 120°;$$

b) $\cos(\widehat{\vec{b},\vec{i}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\widehat{\vec{b},\vec{i}}) = 135°$.

**31.** a) $\overrightarrow{AB}(6\sqrt{3}; -6)$, $\overrightarrow{AC}(-6\sqrt{3}; -6)$;

$$\cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{-6\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3} - 6\cdot(-6)}{\sqrt{(6\sqrt{3})^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{(-6\sqrt{3})^2+(-6)^2}} = -\frac{1}{2},\ \angle A = 120°.$$

Kadangi $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$, tai $\angle B = \angle C = (180° - 120°) : 2 = 30°$.

b) $\overrightarrow{AC}(-6; 0)$, $\overrightarrow{AB}(-6; 6\sqrt{3})$;

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{36}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{36+108}} = \frac{1}{2},\ \angle A = 60°.$$

$\overrightarrow{BA}(6; -6\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC}(0; -6\sqrt{3})$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle B = 30°$.
$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (60° + 30°) = 90°$.

**32.** a) $[\frac{1}{4}; 2]$; b) $[1; 9]$; c) $[1; 2]$; d) $[1; 2]$; e) $[1; 5]$; f) $[1; 25]$.

**33.** a) $x \neq -\frac{3}{4}\pi + 2\pi k,\ k \in Z$; b) $x \neq \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

**34.** a) $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi k,\ k \in Z$;
b) $-\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} + \pi k < x < -\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z$.

**35.** a) 8; b) 6.

**36.** Po 6 s.

**37.** a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{17}{999}$.

**38.** a) $\frac{1}{2}$ cm; b) per $\frac{1}{4}$ s.

**39.** Voro trumpiausio kelio ilgis lygus stačiakampio su kraštinėmis, kurių ilgiai 10 cm ir 20 cm, įstrižainės ilgiui, t. y. $10\sqrt{5}$cm.

**40.** a) 2 val. 48 min.; b) 5 val. 36 min.; c) 1 val. 24 min.

**41.** 8. *Pastaba.* Tai labai sunkus uždavinys (griežtai sprendžiant).